

ESERCIZIO TRATTO DAL LIBRO DI TESTO "Fondamenti di fisica" (D. Halliday, R. Resnick, J. Walker)
 Capitolo 26 n° 54

Sviluppo curato da: **Francesca Caporale**
 Docente: *prof. Quintino D'Annibale*

Classe 5° L.S.T. A
 a.s. 2005/2006

Testo

Un condensatore a piatti paralleli di area A viene riempito con due dielettrici, come mostrato in figura. Si dimostri che la capacità è data da

$$C = \frac{2 \cdot \xi_0 \cdot A}{d} \cdot \frac{\xi_{r1} \cdot \xi_{r2}}{\xi_{r1} + \xi_{r2}}$$

Si verifichi questa formula in tutti i casi limite che si possono pensare.

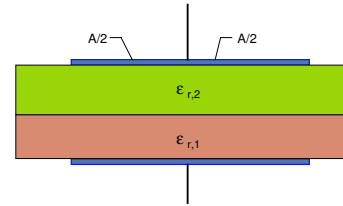


Figura 1

Sviluppo

Possiamo considerare il condensatore come se fossero due condensatori posti tra loro in serie. La somma delle capacità di due condensatori in serie è:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Inoltre la capacità di un condensatore espressa attraverso le soli componenti geometriche e ambientali è:

$$C = \xi_0 \cdot \xi_r \cdot \frac{A}{d}$$

Dove ξ_0 rappresenta la costante dielettrica nel vuoto, ξ_r la costante dielettrica relativa, propria dei materiali, A l'area per cui si estende il condensatore, e d la distanza tra i piatti.
 Ora sostituendo nella prima equazione:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{\xi_0 \cdot \xi_{r1} \cdot 2 \cdot A} + \frac{d}{\xi_0 \cdot \xi_{r2} \cdot 2 \cdot A} = \frac{d}{\xi_0 \cdot 2 \cdot A} \cdot \left(\frac{1}{\xi_{r1}} + \frac{1}{\xi_{r2}} \right) = \frac{d}{\xi_0 \cdot 2 \cdot A} \cdot \left(\frac{\xi_{r2} + \xi_{r1}}{\xi_{r2} \cdot \xi_{r1}} \right)$$

Da cui la resistenza equivalente sarà:

$$C = \frac{2 \cdot \xi_0 \cdot A}{d} \cdot \left(\frac{\xi_{r1} \cdot \xi_{r2}}{\xi_{r2} + \xi_{r1}} \right)$$

Come volevamo dimostrare.

Possiamo ipotizzare diversi casi limite:

1) I due dielettrici sono dello stesso materiale:

$$C = \frac{2 \cdot \xi_0 \cdot A}{d} \cdot \left(\frac{\xi_{r1} \cdot \xi_{r1}}{\xi_{r1} + \xi_{r1}} \right) = \frac{2 \cdot \xi_0 \cdot A}{d} \cdot \left(\frac{\xi_{r1}^2}{2 \cdot \xi_{r1}} \right) = \xi_0 \cdot \xi_{r1} \cdot \frac{A}{d}$$

L'uguaglianza è quella già proposta, ovvero la capacità di un condensatore in presenza di un solo dielettrico, come è stato premesso nell'ipotesi.

2) Non ci sono dielettrici all'interno del condensatore, ovvero $\xi_r = 1$:

$$C = \frac{2 \cdot \xi_0 \cdot A}{d} \cdot \left(\frac{1 \cdot 1}{1 + 1} \right) = \xi_0 \cdot \frac{A}{d}$$

L'uguaglianza rappresenta effettivamente la capacità di un condensatore senza dielettrico all'interno.

F. Caporale