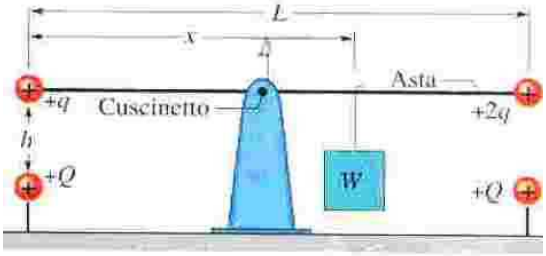
ESERCIZIO TRATTO DAL LIBRO DI TESTO "Fondamenti di fisica" (D. Halliday, R. Resnick, J. Walker)

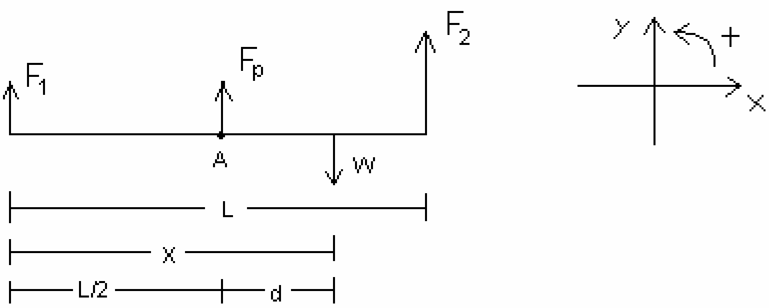
Sviluppo curato da: **Antonio Giuliano** **Classe V LST A**
Docente: prof. Quintino d'Annibale a.s.2006/2007

Testo
La figura mostra una lunga asticella di materiale isolante,senza massa,imperniata al centro e bilanciata con un peso W posto alla distanza x dal suo estremo sinistro. Alla estremità sinistra e destra dell'asticella sono poste le cariche q e 2q rispettivamente,mentre sotto ognuna di queste cariche è fissata una carica positiva Q a una distanza h.

(a) Si calcoli la posizione x dove deve essere appeso W affinché l'asticella si bilanciata;
(b) Quale dovrebbe essere la distanza h affinché il perno non eserciti alcuna forza lungo la verticale quando l'asticella è bilanciata e orizzontale?



Sviluppo
Possiamo iniziare nel risolvere il problema attraverso una scomposizione delle forze che agiscono direttamente sulla lunga asticella. Come riportato sottostante abbiamo una forza F_1 diretta verso l'alto generata dalla carica +Q,poi c'è la forza F_2 diretta verso l'alto anch'essa generata dalla carica +Q,poi abbiamo la forza peso W del corpo che agisce direttamente verso il basso e infine abbiamo la forza diretta verso l'alto esercitata dal perno al centro dell'asticella. Nel sottostante disegno viene riportato di fianco alla scomposizione delle forze un asse cartesiano in cui indica il verso positivo che prenderemo in considerazione.



Affinché l'asticella si bilanciata deve esserci un equilibrio statico che si verifica quando sono soddisfatte le tre equazioni riportate sottostante:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 & (1) \\ \sum F_Y = 0 & (2) \\ \sum \tau_Z = 0 & (3) \end{cases}$$

Punto a

Dal disegno precedente si vede molto bene che la distanza x è: $x = \frac{L}{2} + d \qquad (4)$

Per trovare la x occorre sapere la distanza d allora andiamo ad applicare la (3) dove utilizzando la sommatoria dei momenti possiamo ricavare d. Il punto scelto da dove parte il braccio e al centro dell'asticella punto A.

$$\sum \tau_Z = 0 \Rightarrow F_2 \cdot \frac{L}{2} - W \cdot d - F_1 \cdot \frac{L}{2} = 0 \qquad d = \frac{F_2 \cdot \frac{L}{2} - F_1 \cdot \frac{L}{2}}{W}$$

Le forze F_1 ed F_2 possono essere ricavate attraverso l'applicazione della legge di Coulomb visto che abbiamo in entrambi i casi una forza di repulsione tra le cariche perché sono dello stesso segno.

$$F = K \cdot \frac{q \cdot Q}{d^2} \text{ legge di Coulomb} \Rightarrow F_1 = K \cdot \frac{q \cdot Q}{h^2} \quad \text{ed} \quad F_2 = K \cdot \frac{q \cdot 2 \cdot Q}{h^2}$$

Andando a sostituire le forze F_1 ed F_2 all'equazione precedente della distanza otteniamo:

$$d = \left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot 2 \cdot Q}{h^2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{h^2} \cdot \frac{L}{2} \right) \cdot \frac{1}{W} = \left(\frac{q \cdot Q \cdot L}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h^2} - \frac{q \cdot Q \cdot L}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h^2} \right) \cdot \frac{1}{W}$$

$$d = \left(\frac{2 \cdot q \cdot Q \cdot L - q \cdot Q \cdot L}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h^2} \right) \cdot \frac{1}{W} \Rightarrow d = \frac{q \cdot Q \cdot L}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h^2 \cdot W} \quad (5)$$

Riprendendo la (4) e andando a sostituire a d la (5) otteniamo la distanza x.

$$x = \frac{L}{2} + d = \frac{L}{2} + \frac{q \cdot Q \cdot L}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h^2 \cdot W} = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cdot \frac{q \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h^2 \cdot W} \Rightarrow x = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{q \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h^2 \cdot W} \right)$$

Punto b

Per trovare la distanza h in modo che il perno non eserciti alcuna forza lungo la verticale applichiamo la (2) ossia la sommatoria della forze lungo l'asse y. Andando a sostituire F_1 ed F_2 con le equazioni precedenti relative alla legge di Coulomb e facendo un paio di formule inverse otteniamo la distanza h.

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_1 - W + F_2 = 0 \Rightarrow K \cdot \frac{q \cdot Q}{h^2} - W + K \cdot \frac{2 \cdot Q \cdot q}{h^2} = 0$$

$$K \cdot \frac{3 \cdot q \cdot Q}{h^2} - W = 0 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3 \cdot K \cdot Q \cdot q}{W}}$$

A. Giuliano