ESERCIZIO TRATTO DAL LIBRO DI TESTO "Fondamenti di fisica-Elettromagnetismo"(Halliday, Resnick, Walker)

Sviluppo curato da: **Matteo Caporrella** **Classe V LST A**
Docente: prof. Quintino d'Annibale a.s. 2006/2007

Testo
In una memoria del 1911 Ernest Rutherford scrisse :"Per dare un'idea della forza necessaria per deflettere una particella α di un angolo considerevole, si consideri un atomo che contenga una carica puntiforme Ze nel suo centro e sia circondato da una distribuzione di elettricità negativa $-Ze$ uniformemente distribuita a forma sferica di raggio R. Il campo elettrico E…a una distanza r dal centro per un punto *interno* all'atomo [è]

$$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)".$$

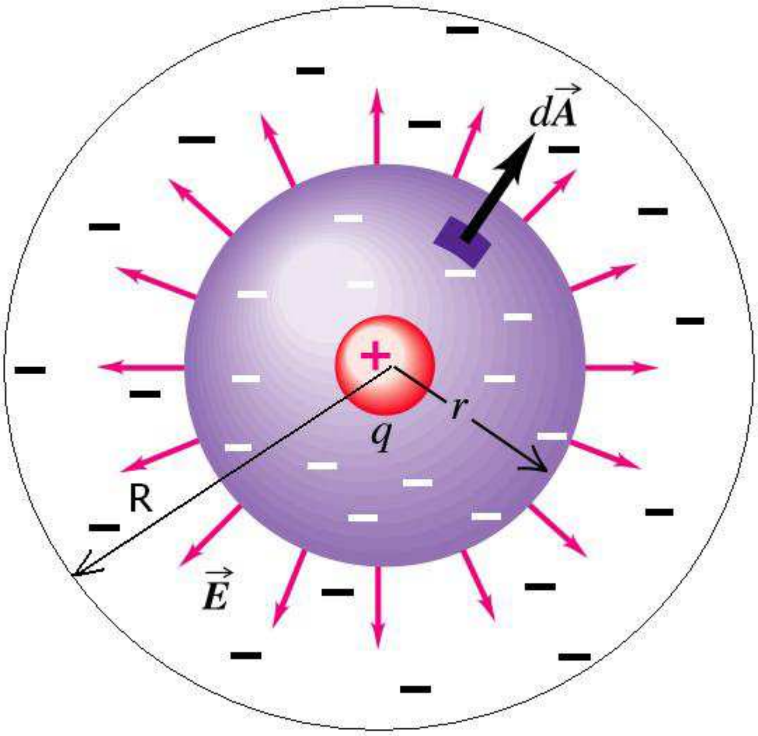
Si verifichi questa equazione.

Sviluppo

Per verificare l'equazione è utile conoscere la legge di Gauss che mette in relazione i campi su una superficie gaussiana(una qualsiasi superficie ipotetica chiusa) con le cariche racchiuse dalla superficie stessa, o meglio ancora il flusso netto $\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ di un campo elettrico attraverso la gaussiana con la carica netta q_{int} racchiusa dalla superficie. Essa dice che:

1) $\varepsilon_0 \phi = q_{\text{int}}$

Potendo scegliere una superficie conveniente simile alla simmetria del problema esaminato, scegliamo una superficie sferica concentrica all'atomo e di raggio r tale che sia $r < R$. In accordo alla 1) in tale situazione non tutti gli elettroni producono campo: parte di essi: quelli a distanza compresa tra r e R, trovandosi al di fuori della posizione considerata, agiscono come uno strato sferico e non producono campo all'interno, la restante parte invece produce campo. Si ha quindi una situazione analoga a quella della figura dove la carica interna è pari alla somma tra la carica positiva $q_{(+)}$ e quella negativa $q_{(-)}$ degli elettroni interni.



Applicando la 1) al sistema, passiamo a trovare le varie incognite.

Per la considerazione di cui prima, calcolando q_{int} si ha:

2) $q_{\text{int}} = q_{(+)} + q_{(-)}$

Per la carica positiva non vi sono problemi, essa è pari come da testo a

3) $q_{(+)} = Ze$

Per determinare la carica negativa invece, occorre considerare la carica detenuta dalla sfera di raggio $r < R$ e volume V_r, che da testo presenta una densità di carica uniforme δ. Per definizione di densità si ha:

$\delta = \frac{q_{(-)}}{V_r}$ e quindi

4) $q_{(-)} = \delta \cdot V_r$

In questa relazione l'incognita è la densità, ma questa è costante in tutta la sfera di raggio R e volume V_R, ossia:

5) $\delta = \frac{q_{(-)totale}}{V_R}$

Essendo noti in questa relazione tutti i termini, dove $q_{(-)totale} = -Ze$, sostituendo questa espressione nella 4) ed esplicitando i valori dei volumi si ha:

$$q_{(-)} = q_{(-)totale} \cdot \frac{V_r}{V_R} = q_{(-)totale} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

6) $q_{(-)} = -Ze \cdot \frac{r^3}{R^3}$

Sostituendo questa espressione e la 3) nella 2), e quindi nella 1) si ha:

7) $\varepsilon_0 \phi = Ze - Ze \cdot \frac{r^3}{R^3} = Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$

Osserviamo questa relazione: il rapporto $\frac{r^3}{R^3}$, essendo $r < R$, è sicuramente minore di 1, e quindi la quantità $\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$ è sicuramente positiva; ε_0 è positiva e quindi anche il flusso, $\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ deve essere positivo.
Quest'ultimo è un prodotto scalare e, se per essere positivo deve essere che l'angolo compreso θ sia nullo, allora considerando che per definizione $d\vec{A}$ è perpendicolare ad ogni punto della superficie e si dirige dall'interno verso l'esterno, il campo elettrico $\vec{E}$, perpendicolare in ogni punto alla superficie per simmetria, deve dirigersi dall'interno verso l'esterno: ciò è in accordo col fatto che la carica negativa intrappolata è minore di quella positiva $\left|q_{(-)}\right| < \left|q_{(+)}\right|$ e giustifica la figura.

Alla luce di queste considerazioni si può riscrivere la 7) in:

$$\varepsilon_0 \phi = Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$\varepsilon_0 \oint E dA \cos 0° = Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

8) $$\varepsilon_0 \oint E dA = Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

Sebbene l'intensità del campo elettrico vari radialmente con la distanza dalla carica, ha lo stesso valore su tutta la superficie sferica, e siccome l'integrale è calcolato su quella superficie, E è una costante nell'integrazione e può essere portata fuori dal segno di integrale e si ha:

9) $$\varepsilon_0 E \oint dA = Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

L'integrale si è ridotto ora alla somma di tutte le aree differenziali dA, non altro che l'area della superficie della sfera pari a $4\pi r^2$. Si ha quindi:

$$\varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$ e quindi:

$$E = \frac{Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$ o scritta meglio:

$$E = \frac{Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)\frac{1}{r^2}}{\varepsilon_0 4\pi} = \frac{Ze\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r^3}{R^3 \cdot r^2}\right)}{4\pi\varepsilon_0}$$ e quindi:

10) $$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

che è l'equazione che dovevamo verificare. c.v.d.