ESERCIZIO TRATTO DAL LIBRO DI TESTO "Fondamenti di fisica-Elettromagnetismo"(Halliday, Resnick, Walker)

Sviluppo curato da: **Matteo Caporrella** **Classe V LST A**
Docente: prof. Quintino d'Annibale a.s. 2006/2007

Testo

Una lastra dielettrica di spessore b viene inserita tra i piatti di un condensatore a piatti paralleli con una distanza tra i piatti d. (a) Si dimostri che la capacità è data da

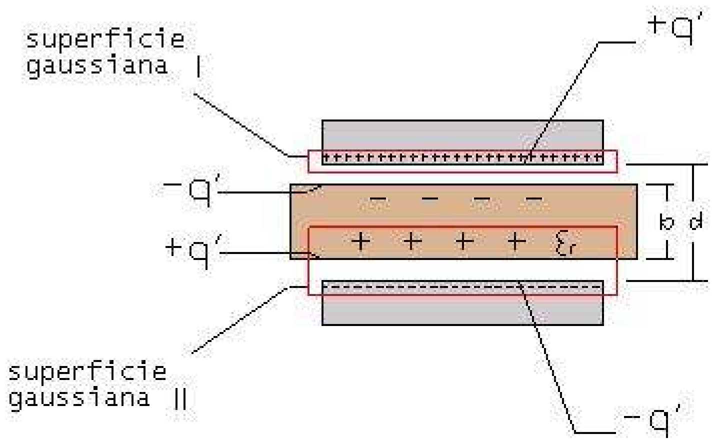
$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{\varepsilon_r d - b(\varepsilon_r - 1)}.$$

(b) Si verifichi che la formula dà risultati ragionevoli nel caso particolare in cui $b = 0$, $\varepsilon_r = 1$ e $b = d$.

Sviluppo

La capacità di un condensatore carico è data da:

1) $$C = \frac{q}{V}$$



Applicando la legge di Gauss

2) $$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \overrightarrow{E_0} \cdot d\overrightarrow{A} = q_{\text{int}}$$

alla superficie gaussiana I della figura che racchiude solo la carica libera q del piatto superiore, possiamo determinare quest'ultima, che ci servirà appunto per la capacità.
Dato che $d\overrightarrow{A}$ ed $\overrightarrow{E_0}$, il campo elettrico nelle zone vuote tra i piatti e la lastra dielettrica, sono concordi, e che la costante dielettrica nel vuoto è 1, perché la superficie gaussiana sulla quale viene integrata la legge di Gauss non contiene dielettrici, si ha:

3) $$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \overrightarrow{E_0} \cdot d\overrightarrow{A} = (1)\varepsilon_0 E_0 A = q$$

A questo punto, per risolvere la 1), si necessita il calcolo della differenza di potenziale tra i piatti: in un condensatore, essa vale:

4) $$V = \int_{+}^{-} E \cdot ds$$

dove E è il campo elettrico tra i piatti, ds lo spostamento differenziale lungo la linea retta che congiunge un piatto all'altro, tale che il prodotto scalare sia la quantità positiva $E \cdot ds$, e i segni indicano che il cammino di integrazione inizia sul piatto positivo e termina su quello negativo.
Nel caso esaminato, all'interno del dielettrico il percorso è b e il campo elettrico E_1, mentre all'interno dei due spazi sopra e sotto il dielettrico il percorso totale è $d - b$, e il campo elettrico E_0.

Per determinare Il valore di E_1, si applica invece la legge di Gauss alla superficie gaussiana II. Si ha quindi:

5) $$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E_1} \cdot d\vec{A} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 E_1 A = -q$$

dove il segno meno deriva dal prodotto scalare tale che E_1 e $d\vec{A}$ sono discordi. Risolvendo rispetto al campo elettrico si trova:

7) $$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}$$

Osservando dalla 3) che $E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$, si può riscrivere la 7) come:

8) $$E_1 = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Sostituendo ora i valori noti nella 4) si ha:

9) $$V = \int_+^- E \cdot ds = E_0\left(d-b\right) + E_1 b = E_0\left(d-b\right) + \frac{E_0}{\varepsilon_r} b = E_0\left(d - b + \frac{b}{\varepsilon_r}\right) = E_0 \frac{\left[d\varepsilon_r - b\left(\varepsilon_r - 1\right)\right]}{\varepsilon_r}$$

Sostituendo ora nella 1) i valori della carica dalla 3) e della differenza di potenziale dalla 9) si ha:

10) $$C = \frac{E_0 \varepsilon_0 A}{E_0 \frac{\left[d\varepsilon_r - b\left(\varepsilon_r - 1\right)\right]}{\varepsilon_r}} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d\varepsilon_r - b\left(\varepsilon_r - 1\right)}$$

che è l'equazione che volevamo dimostrare.

c.v.d.

Per rispondere alla b), andiamo a sostituire i valori caratteristici dei casi particolari richiesti:

11) quando $b = 0$ si ha $C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d\varepsilon_r - 0\left(\varepsilon_r - 1\right)} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d\varepsilon_r} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

che è la capacità di un condensatore a piatti paralleli senza alcun dielettrico tra i piatti di area A a distanza d, perché in tal caso lo spessore della lamina sarebbe nulla, praticamente non vi è alcun dielettrico tra i piatti;

12) quando $\varepsilon_r = 1$ si ha $C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d\varepsilon_r - b\left(1 - 1\right)} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d\varepsilon_r} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

in questo caso la lamina di dielettrico ha una costante uguale a quella del vuoto, il ritorno alla classica formula è ovvio;

13) quando $b = d$ si ha $C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{\varepsilon_r d - d\left(\varepsilon_r - 1\right)} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

che è l'equazione della capacità di un condensatore quando un dielettrico di costante ε_r riempie completamente lo spazio tra i piatti, come accadrebbe se lo spessore della lamina fosse appunto uguale alla distanza tra i piatti.