

Meccanica Gravitazionale

Quale velocità V_i , in m/s, bisogna imprimere ad un satellite, lanciato dalla superficie della terra, per portarlo ad un'orbita $R=20000 \cdot 10^3$ m dal centro della terra?

($G=6,67 \cdot 10^{-11}$ N m²/Kg², $M_r=5,98 \cdot 10^{24}$ Kg, $R_t=6300 \cdot 10^3$ m) ($V_i=1,03 \cdot 10^4$ m/s)

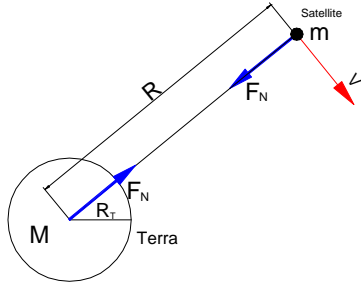


Figura 1

Dal principio di conservazione dell'energia meccanica si ha che :

$$K+U = \text{costante}$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad (1)$$

Nel caso in questione, l'energia meccanica posseduta dal satellite nel momento del lancio (riferita alla superficie terrestre) è uguale a quella posseduta nell'orbita considerata.

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \left(-G \frac{Mm}{R_t}\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 + \left(-G \frac{Mm}{R}\right) \quad (2)$$

risolvendo rispetto alla velocità iniziale si ottiene

$$v_i^2 = v_f^2 + 2G \cdot M \left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R} \right) \quad (3)$$

La (3) sarà risolta una volta determinata la v_f .

La velocità V_f è quella che necessita al satellite per garantire l'uguaglianza tra la forza gravitazionale F_N e quella centripeta F_c .

$$F_N = F_c \quad (4)$$

$$G \frac{Mm}{R^2} = m \frac{v_f^2}{R} \quad (5)$$

I soluzione

$$v_f^2 = G \frac{M}{R} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{20 \cdot 10^6} = 1,99 \cdot 10^7 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \quad (6)$$

$$v_i^2 = 1,99 \cdot 10^7 + 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \left(\frac{1}{6,3 \cdot 10^6} - \frac{1}{20 \cdot 10^6} \right) \cong 1,068 \cdot 10^8 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \quad (7)$$

$$v_i = \sqrt{1,068 \cdot 10^8} \cong 1,03 \cdot 10^4 \text{ m/s} \quad (8)$$

II soluzione

$$v_i^2 = v_f^2 + 2G \cdot M \left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R} \right) = G \frac{M}{R} + 2GM \left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R} \right) = 2GM \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R_t} - \frac{1}{R} \right) = \quad (9)$$

$$= 2G \cdot M \left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{2R} \right) = 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \left(\frac{1}{6,3 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 20 \cdot 10^6} \right) \cong 1,068 \cdot 10^8 \text{ m}^2 / \text{s}^2$$

$$v_i = \sqrt{1,068 \cdot 10^8} \cong 1,03 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

c.d.d.

Q. d'Annibale