Liceo Scientifico Tecnologico
ESERCIZIO TRATTO DAL COMPITO FINALE DEL 3° ANNO

Sviluppo curato da: **Francesca Caporale** e **Lia Di Florio** — **classe III LST A**
Docente: prof. Quintino d'Annibale — a.s. 2003/2004

Testo

Una biglia di raggio r=2 cm con massa m=1,2 Kg è collegata tramite un filo di massa trascurabile ad una carrucola fissa M=2,5 Kg ed R=20 cm.
Lasciata libera di muoversi, la biglia mette la carrucola in rotazione e dopo un tratto di lunghezza h=0,5 m il filo si sgancia dalla carrucola e continua in caduta libera per h1=0,3 m, atterrando senza rimbalzare su di una guida posta inclinata rispetto all'orizzontale di 30°.
Rotolando essa arriva alla base della guida dove continua a muoversi su di un piano privo di attrito prima di urtare in modo elastico la massa di una seconda biglia posta sul sistema rotante di figura con R_1=0,3m.

Nell'ipotesi di poter trascurare la velocità della prima biglia dopo l'urto, determinare:

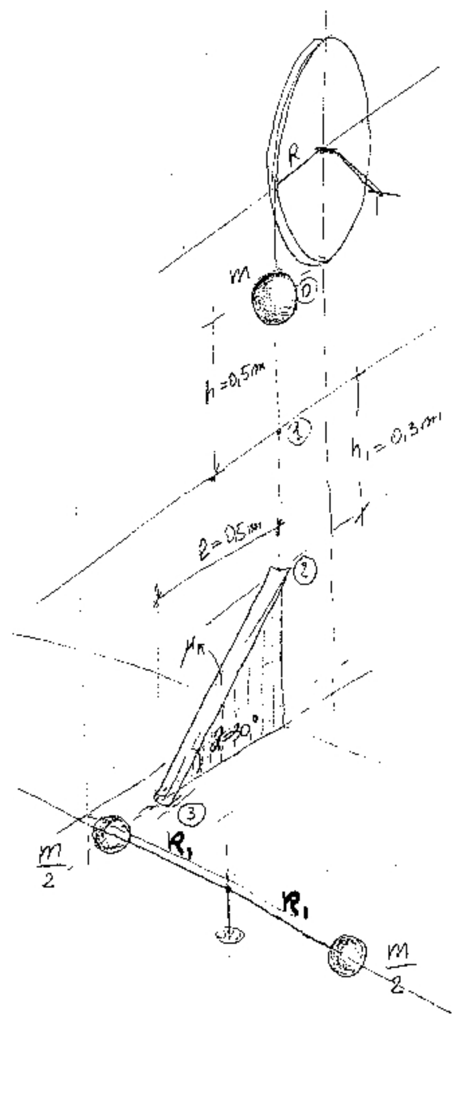
A) A_1- l'accelerazione della biglia
A_2- la tensione del filo
A_3- l'accelerazione angolare della carrucola

B) la velocità della biglia nel punto d'atterraggio sulla guida

C) C_1- la velocità nel punto ai piedi dello scivolo
C_2- determinare il punto C_1, nel caso in cui si trattasse di un disco della stessa massa e stesso raggio della biglia
C_3- determinare la f_s, forza di attrito tra biglia e scivolo(μ_s =0,2)

D) la velocità angolare del sistema rotante dopo l'urto con la biglia (si trascuri la massa dell'asta che regge le due biglie)

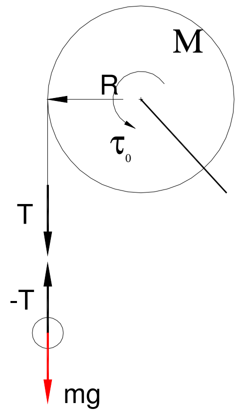
E) determinare la velocità tangenziale delle biglie nella ipotesi che le stesse per effetto della rotazione si spostano lungo l'asta portandosi ad una distanza dal centro pari a 2R



Sviluppo

Osservando il disegno e i punti d'incognita, possiamo dedurre come nel problema tutto sia incentrato attorno alla meccanica, e più in particolare alla sua parte dinamica.
Per poter studiare il problema è conveniente suddividerlo in parti definite, così da isolare i casi che ci interessano.
Nella risoluzione dei vari quesiti ci serviremo delle leggi della dinamica e della conservazione dell'energia, sia in forma lineare (di traslazione), che di angolare(rotazione), in quanto ci permettono una risoluzione più rapida e chiara.

PUNTO A



Disegniamo uno schema generale delle forze in gioco.

Per poter calcolare l'accelerazione della biglia ci serviamo della seconda legge di Newton, avremo quindi:

$$\sum F = m \cdot a \Rightarrow m \cdot g - T_0 = m \cdot a_0 \quad (1)$$

In questa equazione sono però presenti due incognite, la tensione e l'accelerazione.
Dobbiamo quindi servirci di una seconda equazione, da porre a sistema con la prima.
Prendiamo in esame la seconda legge di Newton, questa volta però nella sua forma angolare, da applicare al disco.

$$\sum \tau_0 = I_0 \cdot \alpha_0 \qquad (2)$$

Il momento della forza applicata è dato da ***TR***, in quanto il disco gira in senso antiorario.
Il momento d'inerzia di un disco piano è dato da $I = \frac{1}{2} MR^2$, e l'accelerazione angolare è uguale a quella tangenziale a meno del raggio, quindi $\alpha = a/R$. la (2) diventa:

$$T_0 \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a_0}{R} \qquad (3)$$

Semplifichiamo ottenendo:

$$T_0 = \frac{1}{2} Ma_0 \qquad (4)$$

Andando a sostituire la T_0 nell'equazione (1), avremo:

$$m \cdot g - \frac{M \cdot a_0}{2} = m \cdot a_0 \qquad (5)$$

Possiamo eguagliare l'accelerazione della biglia a quella tangenziale del disco, in quanto la corda non slitta, quindi i due hanno un movimento simultaneo.
Continuando sarà:

$$2m \cdot g = 2m \cdot a_0 + M \cdot a_0 \qquad (6)$$

Ricavando rispetto ad a_0 si ottiene:

$$a_0 = \frac{2m \cdot g}{2\cancel{m} + M} = \frac{2 \cdot 1{,}2Kg \cdot 9{,}8\, m/s^2}{2 \cdot 1{,}2Kg + 2{,}5Kg} = -4{,}8\, m/s^2 \qquad (7)$$

Nota l'accelerazione del sistema, la tensione del filo si ottiene dall'equazione (4)

$$T_0 = \frac{1}{2} Ma_0 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5Kg \cdot 4{,}8 m/s^2 = 6N$$

Come possiamo osservare dai dati ricavati l'accelerazione della biglia è minore di g, ovvero di quella che avrebbe avuto se fosse stata in caduta libera. Allo stesso modo la tensione del filo è minore della forza peso esercitata dalla biglia, altrimenti quest'ultima non si sarebbe mossa.

Per calcolare l'accelerazione angolare del disco, basterà ricordare quanto detto prima, ovvero che essa è pari a quella tangenziale a meno del raggio, quindi:

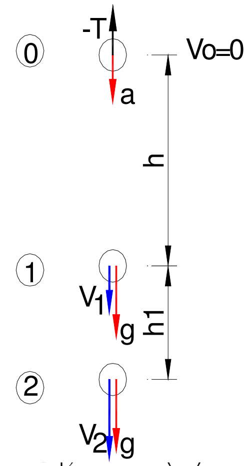
$$\alpha_0 = \frac{a_0}{R} = \frac{4{,}8 m/s^2}{0{,}2m} = 24 rad/s^2 \qquad (8)$$

PUNTO B
Nel punto B viene richiesta la velocità della biglia nel punto (2) di atterraggio sulla guida (nella ipotesi di non rimbalzo)
Il punto B può essere affrontato sia con le equazioni del moto, sia con criteri energetici, utilizzeremo gli ultimi.

Nel tratto **0-1**[1], La variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro fatto dalla forza peso meno quello fatto dalla tensione del filo :

$$\Delta K = \Delta U - L_T \qquad (9)$$

$$\frac{1}{2}m\Delta v^2 = mgh - Th \qquad (10)$$



Che applicata tra i punti 0-1 (V_0=0) e risolvendo rispetto a V_1 diventa:

$$v_1 = \sqrt{2gh - \frac{2Th}{m}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}0{,}5m - \frac{2 \cdot 6N \cdot 0{,}5m}{1{,}2kg}} = 2{,}19m/s$$
(11)

Nel Tratto 1-2 considerando il sistema isolato, possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica[2]:

$$E_{m1} = E_{m2}$$

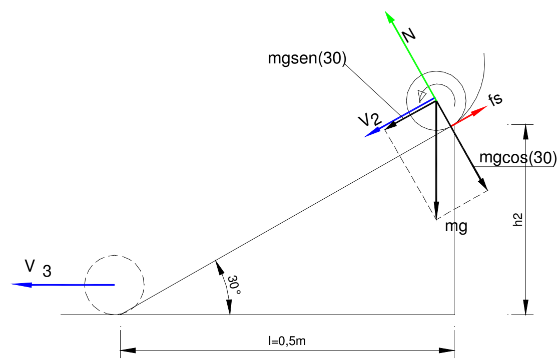
$$\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = -(0 - mgh_1) = mgh_1 \qquad (13)$$

Avendo posto $U_2= 0$, in quanto consideriamo il punto 2 ad altezza zero, ed andando ad esplicitare i valori delle diverse energie e risolvendo rispetto a V_2 otteniamo:

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2gh_1} = \sqrt{2{,}19^2\frac{m^2}{s^2} + 2 \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}0{,}3m} \cong 3{,}27m/s \qquad (14)$$

PUNTO C

C1)-Per calcolare la velocità ai piedi dello scivolo ci serviamo del principio di conservazione dell'energia meccanica applicato tra i punti 2-3.
Dobbiamo calcolarci, innanzitutto, l'altezza dello scivolo, ricorrendo alla trigonometria, ovvero:



$$h_2 = ltg\beta = 0{,}5m \cdot tg30° \cong 0{,}29m$$

premettiamo che in questo caso l'energia cinetica della biglia che rotola sullo scivolo non è solo di traslazione, ma anche di rotazione, quindi:

$$E_{m2} = E_{m3}$$

$$K_2 + U_2 = K_3 + U_3$$

Avremo $U_3 = 0$, se consideriamo a terra lo scivolo.
Andando ora esplicitare i valori delle energie in gioco otteniamo:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 + mgh_2 = \frac{1}{2}mV_3^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \qquad (16)$$

Il momento d'inerzia di una biglia è pari a *2/5 mr²*, inoltre la velocità tangenziale è legata a quella angolare dalla relazione:

$$\omega_2 = \frac{V_2}{r} \qquad (17)$$

Andando a semplificare ed a sostituire nella 16, otteniamo:

[1] N.B.: la biglia per h=50 cm, viaggerà con accelerazione pari ad 4,8 m/s^2 essendo attaccato al filo e, successivamente per h1=30 cm con accelerazione pari a **g** in quando libero dal filo e quindi in caduta libera.
[2] l'incremento della cinetica, è dovuto alla diminuzione dell'energia potenziale

$$\frac{1}{2}mV_2^2 + mgh_2 = \frac{1}{2}mV_3^2 + \frac{1}{2}I\frac{V_3^2}{r^2} \qquad (18)$$

$$\frac{1}{2}V_2^{\,2} + gh_2 = \frac{1}{2}V_3^{\,2} + I\frac{V_3^{\,2}}{2mr^2}$$

$$V_2^{\,2} + 2gh_2 = V_3^{\,2} + I\frac{V_3^{\,2}}{mr^2} = V_3^{\,2}(1+\frac{I}{mr^2})$$

Andando ad esplicitare V_2 :

$$V_3 = \sqrt{\frac{2gh_2 + V_2^{\,2}}{1+\frac{I}{mr^2}}} = \sqrt{\frac{2gh_2 + V_2^{\,2}}{1+\frac{2mr^2}{5mr^2}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8m/s^2\,0{,}29m + 3{,}27^2\,m^2/s^2}{1+\frac{2}{5}}} \cong 3{,}42m/s \qquad (19)$$

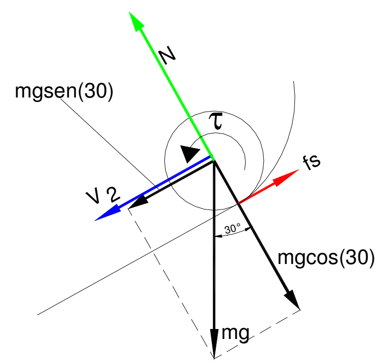
C2)- Se fosse stato presente un disco con le stesse caratteristiche della biglia, l'unica caratteristica che sarebbe variata nel calcolo della velocità ai piedi dello scivolo, sarebbe stata il suo momento d'inerzia nel rotolamento, ovvero: $I = \frac{1}{2}mr^2$ pertanto la (19) sarebbe:

$$V_3 = \sqrt{\frac{2gh_2 + V_2^{\,2}}{1+\frac{I}{mr^2}}} = \sqrt{\frac{2gh_2 + V_2^{\,2}}{1+\frac{mr^2}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8m/s^2\,0{,}29m + 3{,}27^2\,m^2/s^2}{1+\frac{1}{2}}} \cong 3{,}30m/s \qquad (20)$$

La velocità in questo caso è minore, essendo il momento d'inerzia maggiore, quindi anche l'energia cinetica di rotazione sarà minore a scapito di quella di traslazione.

C3)-Il fatto che la biglia rotoli sullo scivolo, significa che fra essi è presente attrito.
Tornando all'ultimo schema delle forze proposto, notiamo come la forza normale del peso sul piano non sia quella già calcolata, ma una sua componente.
Dalla II legge di Newton nelle 2 forme:

$$\sum F = m\cdot a \quad (21) \qquad\qquad \sum \tau = I\cdot\alpha \quad (22)$$



esplicitando la (21): $f_s - mg\cdot sen(\theta) = m\cdot a$ (23)

dalla (22)

$$-f_s\cdot R = I\alpha = I\frac{a}{R} \Rightarrow f_s = -I\frac{a}{R^2} \qquad (24)$$

sostituendo la (24) nella 23 si ha:

$$-I\frac{a}{R^2} - mg\cdot sen(\theta) - m\cdot a = 0 \qquad (25)$$

semplificando e risolvendo rispetto ad ***a***

$$a(1+\frac{I}{mR^2}) = -g\cdot sen(\theta) \Rightarrow a = -\frac{g\cdot sen(\theta)}{1+\frac{I}{mR^2}} \qquad (26)$$

ricordando che $I=2/5mR^2$ (sfera) si ottiene:

$$a = -\frac{g\cdot sen(\theta)}{1+\frac{2mR^2}{5mR^2}} = -\frac{g\cdot sen(\theta)}{\frac{7}{5}} = -\frac{5}{7}g\cdot sen(\theta) \qquad (27)$$

dalla (24):

$$f_s = \frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{5}{7}\frac{g\cdot sen(\theta)}{R^2} = \frac{2}{7}mg\cdot sen(\theta) = \frac{2}{7}1{,}2kg\cdot 9{,}8\frac{m}{s}sen(30) \cong 1{,}68N$$

PUNTO D

Nel momento dell'urto la biglia possiede quantità di moto ed energia cinetica:

$$P = mV_3 = 1{,}2kg\,4{,}2m/s = 4{,}10Ns \tag{28}$$

$$K_3 = \frac{1}{2}mV_3^{\,2} \tag{29}$$

Inoltre essendo l'urto completamente elastico oltre a conservarsi la q. di moto si conserva anche l'energia cinetica[3], quindi:

$$\frac{1}{2}mV_3^2 = \frac{1}{2}I\ \omega^2$$

in cui il secondo membro rappresenta l'energia cinetica rotazionale del sistema biglie-asta, il cui momento d'inerzia ***I*** è:

$$I = \sum m_i r_i^2 = \frac{m}{2}R^2 + \frac{m}{2}R^2 = mR^2$$

Andiamo ora a sostituire ed a semplificare ottenendo:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{V_3^2}{R^2} \rightarrow \omega = \frac{V_3}{R} = \frac{3{,}42m/s}{0{,}2m} \cong 11{,}4rad/s$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{a}{R}$$

PUNTO E

In questo caso possiamo sfruttare il principio della conservazione del momento angolare:

$$\sum \tau = \frac{dL}{dt} = 0 \tag{30}$$

Questo in quanto nessuna forza esterna e, quindi nessun momento agisce in questa fase sul sistema rotante (asta biglie).

Sappiamo che:

$$L_i = L_f \tag{31}$$

Sostituendo nella (24) si ha:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \tag{32}$$

dove $I_i = mR_1^2$

$$mR_1^{\,2}\omega = \omega\sum m_f R_f^{\,2} = \omega_f\, 2\cdot\frac{m}{2}(2R_1)^2 = \omega_f m4R_1^{\,2}$$

semplificando e risolvendo rispetto ad ω otteniamo:

$$\omega_f = \frac{\omega}{4} = \frac{11{,}4rad/s}{4} = 2{,}85rad/s \tag{33}$$

A questo punto possiamo calcolare la velocità tangenziale:

$$V_f = \omega_f 2R_1 = 2{,}85rad/s\cdot 0{,}3m = 1{,}71m/s \tag{34}$$

F.Caporale - L. Di Florio

[3] Lo stesso poteva essere risolto con il principio di conservazione del momento angolare considerando il sistema Sfera – asta con biglie

$$L_i = L_f$$

$$mV_3R_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{mV_3R_1}{mR_1^{\,2}} = \frac{V_3}{R_1}$$