Liceo Scientifico Tecnologico

Classe 3°LST A
a.s. 2010/2011

ESERCIZIO TRATTO DA "Fondamenti di fisica"
(D. Halliday, R. Resnick, J. Walker) Vol. meccanica- Modulo Cap. 11 - Argomento Problema. 42

Sviluppo curato da: *Nicola Della Penna*
Docente: prof. Quintino D'Annibale

Testo
La particella di massa m=50g della figura 11.46 scivola giù per la superficie priva di attrito per un'altezza h=20cm e va ad urtare l'estremità dell'asta verticale omogenea (massa m=100g e lunghezza d=40cm), alla quale si attacca. L'asta gira intorno a **O** di un angolo ϑ e quindi arriva ad un istante di arresto. Trovate ϑ.

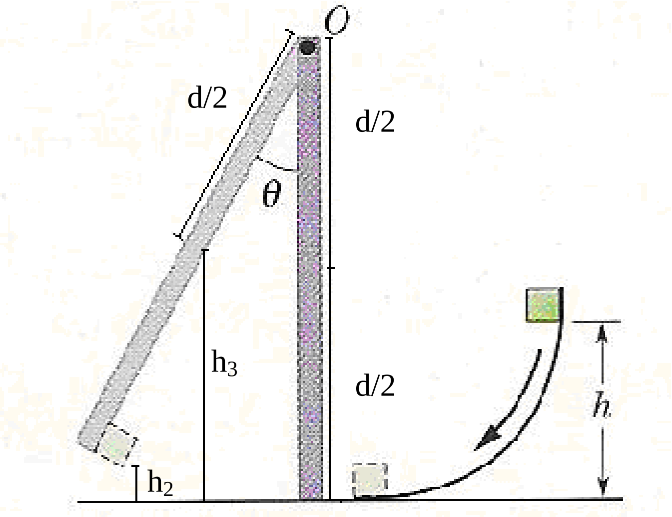

Figura 11.46

Sviluppo
Innanzitutto al fine di determinare l'angolo ϑ, l'idea chiave è quella di sfruttare il principio di conservazione dell'energia meccanica, a tal fine è dapprima necessario determinare la velocità angolare ω del sistema(blocco-asta) dopo l'urto. Ciò è possibile sfruttando la legge di conservazione del momento angolare e applicandola negli istanti immediatamente precedente l'urto(istante iniziale) e successivamente ad esso(istante finale) quando il sistema è in rotazione rispetto ad **o** (consideriamo solo i moduli delle grandezze).

$$L_i = L_f \qquad (1)$$

L_i ,sarà dato solo dal momento angolare del blocco in movimento alla velocità v:

$$L_i = m \cdot v \cdot d sen\alpha$$

Ma essendo $\alpha = 90° \Rightarrow sen\alpha = 1$

$$L_i = m \cdot v \cdot d \qquad (2)$$

Nell'istante finale invece l'unico momento angolare è quello del corpo rigido blocco-asta che ruota attorno ad **o**:

$$L_f = I_t \cdot \omega \qquad (3)$$

Sostituendo L_i e L_f alla (1):

$$m \cdot v \cdot d = I_t \cdot \omega \qquad (4)$$

Ma in tale equazione vi due incognite v e I_t.

Tuttavia la velocità del blocchetto dato che interviene solo la forza gravitazionale(forza conservativa) potrà essere definita dalle leggi riguardanti la caduta dei gravi:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}20m} \cong 1{,}98\frac{m}{s}$$

Invece I_t cioè il momento d'inerzia totale, può essere pensato come il momento d'inerzia dell'asticella(I_a)più il momento d'inerzia del blocchetto (I_b). Ma al fine di determinare I_a ovvero il momento d'inerzia dell'asticella rispetto al suo estremo sfrutteremo il teorema degli assi paralleli, quindi:

$$I_t = I_a + I_b = \left(\frac{1}{2} Md^2 + M \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) + md^2 = \left(\frac{1}{3} Md^2 \right) + md^2$$

Sostituendo:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot 0{,}1kg \cdot (0{,}4m)^2 + 0{,}05kg \cdot (0{,}4m)^2 = 1{,}33 \cdot 10^{-2}\, kg \cdot m^2$$

Quindi essendo noti sia v che I_t possiamo risolvere l'equazione (4)rispetto a ω:

$$\omega = \frac{m \cdot v \cdot d}{I_t} = \frac{0{,}4m \cdot 0{,}05kg \cdot 1{,}98 \frac{m}{s}}{1{,}33 \cdot 10^{-2}\, kg \cdot m^2} \cong 3\, rad/s$$

Soffermiamoci ora sull'intero sistema analizzando l'energia totale appena dopo l'urto e nell'istante in cui il sistema blocco-asta si ferma ad un'inclinazione ϑ. Applicando il principio di conservazione dell'energia:

$$E_i = E_f \qquad (5)$$

Ma E_i sarà data dall'energia cinetica rotazionale del sistema blocco-asta e dall'energia potenziale iniziale dell'asta nell'istante immediatamente successivo all'urto. In particolare l'energia potenziale iniziale dell'asta è definita dall'energia potenziale del centro di massa situato all'altezza $d/2$ rispetto al piano con $E_p = 0$.

$$E_i = E_k + E_{p1} = \frac{1}{2} \cdot I_t \cdot \omega^2 + M \cdot g \cdot \frac{d}{2} \qquad (6)$$

Invece E_f , dato che il sistema è fermo sarà l'energia potenziale del blocco più l'energia potenziale dell'asta.

$$E_f = E_{p2} + E_{p3} = m \cdot g \cdot h_2 + M \cdot g \cdot h_3 \qquad (7)$$

Tuttavia a noi non sono noti né h_2, né h_3, i quali però possono essere espressi in funzione di $\cos\vartheta$. In particolare abbiamo che:

$$h_2 = d - d\cos\vartheta$$

Invece:

$$h_3 = d - \frac{d}{2}\cos\vartheta$$

Di conseguenza sostituendo alla (7) otteniamo che:

$$E_f = m \cdot g \cdot (d - d\cos\vartheta) + M \cdot g \cdot \left(d - \frac{d}{2}\cos\vartheta \right)$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} \cdot I_t \cdot \omega^2 + M \cdot g \cdot \frac{d}{2} = m \cdot g \cdot (d - d\cos\vartheta) + M \cdot g \cdot \left(d - \frac{d}{2}\cos\vartheta \right)$$

Così facendo si ottiene un'equazione di primo grado in incognita $\cos\vartheta$, sostituendo:

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-2}\, kg \cdot m^2 \cdot \left(3\frac{rad}{s} \right)^2 + 0{,}1kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot \frac{0{,}4}{2} m = 0{,}05kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}4m(1 - \cos\vartheta) +$$
$$+ 0{,}1kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}4m\left(1 - \frac{1}{2}\cos\vartheta \right)$$

Risolvendo rispetto a $\cos\vartheta$ otteniamo che:

$\cos\vartheta \cong 0{,}85 \Rightarrow \vartheta \cong 32^\circ$

Nicola Della Penna