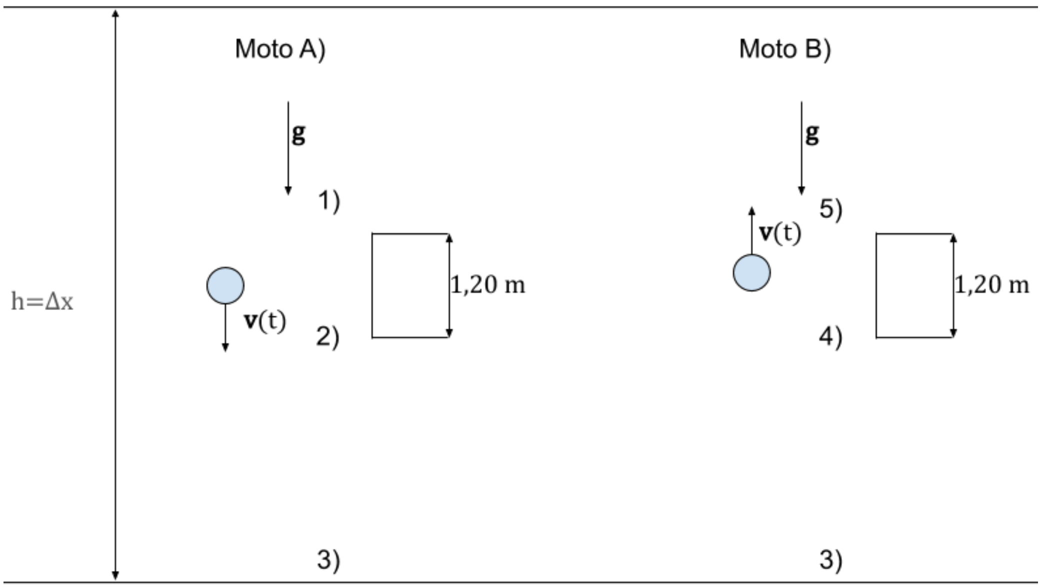
I.I.S. – ITIS

a.s. 2019-2020

ESERCIZIO TRATTO da: **"Fondamenti di fisica"**
(D. Halliday, R. Resnick, J. Walker) Vol. Meccanica - Modulo Cap. 2 - Argomento Problema:

Sviluppo curato da: Iubatti Domenico
Docente: prof. Quintino d'Annibale

Testo:
Una sfera d'acciaio, lasciata cadere dal tetto di un edificio, passa davanti a una finestra impiegando 0,125 s a percorrerne l'altezza, che è di 1,20 m. Quindi cade sul marciapiede e rimbalza in modo completamente elastico fino a passare davanti alla finestra, impiegando ancora, dal bordo inferiore a quello superiore, 0,125 s (Il volo verso l'alto è l'opposto di una caduta.)
Il tempo totale passato al di sotto del davanzale della finestra è 2,00 s.
Quanto è alto l'edificio?



Sviluppo:
Approssimando l'accelerazione di gravità ad una costante $g(R_{Terra}+h) \approx g(R_{Terra})$ possiamo trattare il moto della sfera come rettilineo uniformemente accelerato, di conseguenza è possibile ricorrere alle equazioni di detto moto, con le informazioni fornite dal testo.
Infatti sarà sufficiente determinare lo spostamento della sfera, che è eguale all'altezza dell'edificio.

Per il moto A) avremo, essendo $a = +g$:

$$\begin{cases} \Delta x = v_0 t + \dfrac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = v_0 + g t \end{cases}$$

Poiché la sfera viene lasciata cadere senza che riceva alcun impulso, essa parte all'istante t_0 con una velocità $v_0 = 0$, pertanto le equazioni possono essere semplificate in:

$$\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix} \begin{cases} \Delta x = \dfrac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = g t \end{cases}$$

Dalla 1) possiamo dedurre come per risolvere il problema sia necessario conoscere l'intervallo di tempo complessivo di caduta, tuttavia, dalla 2), possiamo esprimere il tempo di caduta come:

$$t = \frac{v(t)}{g}$$

Di conseguenza la 1) può essere riscritta come:

$$3)\quad \Delta x = \frac{1}{2} g \frac{v(t)^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v(t)^2}{g}$$

In questo modo abbiamo ricondotto la soluzione del problema alla determinazione della velocità all'istante t_3.
Per determinare tale velocità, possiamo applicare nuovamente la legge oraria per il moto B), in particolare, possiamo considerare lo spostamento tra i due estremi della finestra, ottenibile come differenza fra le posizioni $x(t_5)$ e $x(t_4)$[1], pertanto:
(ricordando che per il moto B) $a = -g$)

$$x(t_5) = x(t_3) + v(t_3)t_5 - \frac{g}{2}{t_5}^2$$

$$x(t_4) = x(t_3) + v(t_3)t_4 - \frac{g}{2}{t_4}^2$$

Da cui:

$$4)\quad h_{finestra} = x(t_5) - x(t_4) = v(t_3)(t_5 - t_4) - \frac{g}{2}({t_5}^2 - {t_4}^2)$$

Dove $(t_5 - t_4)$ corrisponde al tempo impiegato dalla sfera per percorrere la finestra, tuttavia poiché non è nota la quantità ${t_5}^2 - {t_4}^2$, possiamo esprimerla, con alcuni passaggi algebrici, come:

$${t_5}^2 - {t_4}^2 = (t_5 - t_4)(t_5 + t_4) = (t_5 - t_4)(t_5 - t_4 + 2t_4)$$

Sostituendo infine t_4 (il tempo che impiega la sfera per raggiungere il punto 4 partendo dal punto 3) con la quantità $\Delta t_{sottofinestra}/2$ possiamo riscrivere la 4) come:

$$5)\quad h_{finestra} = x(t_5) - x(t_4) = v(t_3)(t_5 - t_4) - \frac{g}{2}((t_5 - t_4)\big(t_5 - t_4 + \Delta t_{sottofinestra}\big))$$

Risolvendo la 5) rispetto a $v(t_3)$ si ha:

$$6)\quad v(t_3) = \frac{h_{finestra}}{(t_5 - t_4)} + \frac{g}{2}\Big((t_5 - t_4) + \Delta t_{sottofinestra}\Big)$$

Infine, sostituendo nella 3):

$$7)\quad h = \Delta x = \frac{1}{2}\frac{v(t_3)^2}{g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{h_{finestra}}{(t_5 - t_4)} + \frac{g}{2}\big[(t_5 - t_4) + \Delta t_{sottofinestra}\big]\right)^2$$

Sostituendo i valori numerici:

$$h = \frac{1}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\left(\frac{1{,}20\ \mathrm{m}}{0{,}125\ \mathrm{s}} + \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}[0{,}125\ \mathrm{s} + 2\ \mathrm{s}]\right)^2 \cong 20{,}43\ \mathrm{m}$$

Domenico Iubatti

[1] N.B. I due moti vengono considerati separatamente, pertanto gli istanti t_5 e t_4 rappresentano, rispettivamente, il tempo che impiega la sfera per raggiungere il punto 5 dal punto 3 e il tempo che impiega la sfera per raggiungere il punto 4 dal punto 3.