Liceo Scientifico Tecnologico

Classe 3 LST A
a.s.: 2009/2010

ESERCIZIO TRATTO DA "Fondamenti di fisica"
(D. Halliday, R. Resnick, J. Walker) Vol. 1 - Modulo Cap. 4 - Argomento Problema 79P

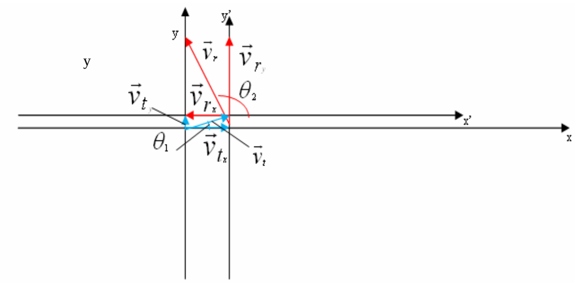
Sviluppo curato da: *Andreoli Andrea*
Docente: prof. Quintino D'Annibale

Testo

La polizia usa talvolta aeroplani per far rispettare i limiti di velocità sulle autostrade. Supponiamo che uno di questi aerei abbia una velocità rispetto all'aria di 220 Km/h. sta volando verso nord tenendosi costantemente su un'autostrada diretta nord/sud. Un'assistente da terra informa il pilota che si è levato un vento di 114Km/h, dimenticando però di indicarne la direzione. Il pilota osserva che nonostante il vento, l'aereo può ancora volare lungo l'autostrada a 220 Km/h. In altre parole, riesce a tenere, rispetto al terreno, la sua velocità normale in aria calma. a) Qual è la direzione del vento ? b) Qual è la prora dell'aereo, ossia l'angolo fra il suo asse longitudinale e l'autostrada?

Sviluppo

L'aereo si muove ad una altezza da terra costante quindi prendiamo in riferimento un sistema di assi cartesiani x e y (nord e est) relativi al terreno e un piano di trascinamento x' e y' relativo al vento



Dai dati fornitici dal problema si deduce che la velocità dell'aereo in presenza di vento è costante e, relativamente al terreno, la si può esprimere come:

$$\vec{v}_a = v_{a_x}\vec{i} + v_{a_y}\vec{j}$$

Ma l'aereo si muove verso nord quindi: v

$$2)\quad v_{a_x} = 0 \qquad \vec{v}_a = \vec{v}_{a_y}$$

Considerando la velocità di trascinamento (v_t = velocità del vento) e quella dell'aereo relativa al vento si ha che:

$$3)\quad \vec{v}_{a_x} = \vec{v}_{t_x} + \vec{v}_{r_x} \qquad \vec{v}_{a_y} = \vec{v}_{t_y} + \vec{v}_{r_y}$$

Strategia

Si consideri Θ1 l'angolo formato dalla velocità di trascinamento con il semiasse positivo delle x e Θ2 l'angolo formato dalla velocità relativa dell'aereo con il semiasse positivo delle x. Secondo il concetto di seno e coseno si possono pensare le velocità come:

$$4)\quad \begin{aligned} v_{r_x} &= v_r\cos\theta_2 \\ v_{r_y} &= v_r\sin\theta_2 \\ v_{t_x} &= v_t\cos\theta_1 \\ v_{t_y} &= v_t\sin\theta_1 \end{aligned}$$

Sostituendo la 4) alla 3) e alla 2) si ottiene:

$$v_{a_x} = v_t\cos\theta_1 + v_r\cos\theta_2$$

$$5)\quad v_{a_y} = v_t\sin\theta_1 + v_r\sin\theta_2$$

Si ricavi $\cos\theta_1$ dalla 5) e $\sin\theta_1$ dalla 6):

$$7)\quad \cos\theta_2 = \frac{v_{a_x} - v_t\cos\theta_1}{v_r}$$

$$8)\quad \sin\theta_2 = \frac{v_{a_y} - v_t\sin\theta_1}{v_r}$$

Dalla prima relazione fondamentale della goniometria:

$$9)\quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Si ha sostituendo la 7) e la 8) alla 9) :

$$10)\quad \left(\frac{v_{a_x} - v_t\cos\theta_1}{v_r}\right)^2 + \left(\frac{v_{a_y} - v_t\sin\theta_1}{v_r}\right)^2 = 1$$

Ma $v_{a_x} = 0$ e, in modulo, $v_{a_y} = v_r$, quindi sviluppando si ha:

$$11)\quad \frac{v_t^2\cos^2\theta_1 + v_t^2\sin^2\theta_1 + v_r^2 - 2v_r v_t\sin\theta_1}{v_r^2} = 1$$

Semplifichiamo: $v_t^2\cos^2\theta_1 + v_t^2\sin^2\theta_1 - 2v_r v_t\sin\theta_1 = 0$

Dividiamo tutto per v_t^2:

$$\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 - 2\frac{v_r}{v_t}\sin\theta_1 = 0$$

Ma:

$$\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 = 1$$

$$1 - 2\frac{v_r}{v_t}\sin\theta_1 = 0$$

Allora:

$$\sin\theta_1 = \frac{v_t}{2v_r}$$

$$12)\quad \theta_1 = arcsen\left(\frac{v_t}{2v_r}\right) = arcsen\left(\frac{114\ Km/h}{2 * 220\ Km/h}\right) = 15^\circ$$

Ci si ricava così θ_2 dalla 7):

$$13)\quad \theta_2 = \arccos\left(\frac{-v_t\cos\theta_1}{v_r}\right) = \arccos\left(\frac{-114\ Km/h * \cos 15^\circ}{220\ Km/h}\right) = 120^\circ$$

Ovviamente seno e coseno hanno due valori accettabili e quindi è giusta anche la coppia di angoli:

$$\theta_1 = 165^\circ$$
$$\theta_2 = 60^\circ$$

Andreoli Andrea