Elettromagnetismo - Dielettrici e legge di Gauss

Liceo Scientifico tecnologico

Classe 5 LST B
a.s. 2013/2014

ESERCIZIO TRATTO DAL LIBRO DI TESTO “Fondamenti di fisica-Elettromagnetismo”(D.Halliday, R.Resnick, J.Walker)Vol.Elettromagnetismo - Modulo Cap.25 - Argomento Problema: dielettrici e legge di Gauss.

Sviluppo curato da: **Dante Giovannangelo**
Docente: Quintino D’Annibale

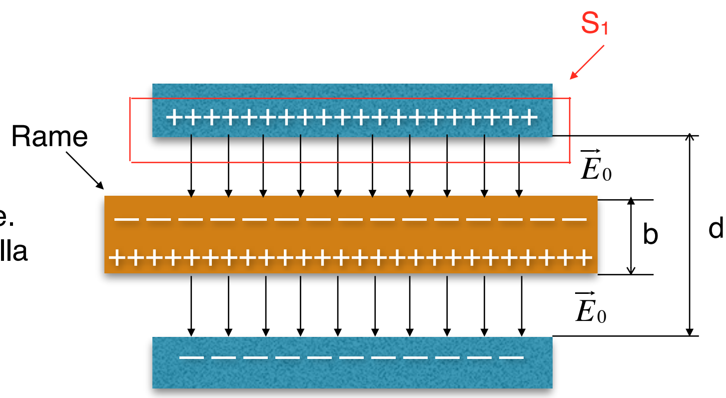
Testo
Una lastra di rame di spessore *b = 2,00 mm* viene inserita in un condensatore a piatti paralleli di area *A = 2,40 cm²* e distanza *d = 5,00 mm*, come mostrato in *figura*; la lastra si trova esattamente a metà tra i piatti.

A. Quale sarà la capacità dopo che si è introdotta la lastra?
B. Mantenendo sui piatti una carica *q = 3,40 μC,* si trovi il rapporto tra l’energia immagazzinata prima e quella dopo l’inserimento della lastra.
C. Quanto lavoro si compie sulla lastra durante l’inserimento? La lastra viene attratta nel condensatore oppure è necessario spingervela?

Sviluppo

<u>- Punto A</u>

L’idea chiave sta nella definizione di capacità di un condensatore carico:



1) $$C = \frac{q}{V}$$

Basta ora espletare i due termini dell’equazione. Partiamo dalla carica q ricorrendo al calcolo della capacità tramite la legge di Gauss:

2) $$q_{\text{int}} = \Phi_{net}\varepsilon = \varepsilon\oint \vec{E}_0 d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E}_0 d\vec{A}$$

alla superficie gaussiana ***S₁*** che racchiude la sola carica libera del condensatore *q* del piatto superiore.

*ricordo che |+q| (piatto superiore) = |-q| (piatto inferiore).

Dato che ***dA*** ed ***E₀***, il campo elettrico nelle zone vuote,costante, tra i piatti e la lastra dielettrica, sono concordi, e che la costante dielettrica relativa nel vuoto è 1(Nm²/C²), perché la superficie gaussiana sulla quale viene integrata la legge di Gauss non contiene dielettrici, si ha, proseguendo nella (2):

3) $$q = \varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E}_0 d\vec{A} = \varepsilon_0 E_0 A$$

Passiamo ora alla differenza di potenziale V che in un condensatore vale:

4) $$V = \int_{-}^{+} E\, ds$$

in cui ***E*** è il vettore campo elettrico tra i piatti del condensatore, ***ds*** è il vettore spostamento differenziale lungo la linea retta che va dal piatto negativo a quello positivo, di verso opposto a quello del campo elettrico , tale che il prodotto scalare tra i due membri diano segno negativo, rendendo però positiva la definizione di differenza di potenziale ponendo $V_i = 0$.
La particolarità dell'esercizio sta proprio nel calcolo dei campi elettrici. Di fatti, abbiamo, inserito fra le lastre, non un dielettrico che per definizione è un materiale isolante, bensì una lastra di rame che è un conduttore.
Come sappiamo all'interno del conduttore non si instaura nessun campo elettrico, benché assistiamo ad un effetto di induzione elettrostatica che è totalmente diverso dalla polarizzazione elettrica negli isolanti.

Quindi l'unico campo presente è E_0 il cui percorso d'integrazione è proprio uguale a d-b.
Sostituendo alla (4) otteniamo:

5) $$V = \int_{-}^{+} E\,ds = \int_{-}^{+} E_0\,ds = E_0(d-b)$$

Fatte le opportune equivalenze sostituisco la (3) e la (5) alla (1):

6) $$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 \cancel{E_0} A}{\cancel{E_0}(d-b)} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-b} = \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{(N\cdot \cancel{m}^2)}\cdot 2{,}40\cdot 10^{-4}\,\cancel{m}^2}{(5\cdot 10^{-3} - 2\cdot 10^{-3})m} = 0{,}708\rho F$$

Ecco ottenuto il risultato.

- Punto B

L'idea chiave sta nell'individuare l'energia potenziale immagazzinata all'interno del condensatore:

7) $$U = \frac{q^2}{2C}$$

scegliamo questa formulazione per semplificare i passaggi algebrici. Troviamo ora il rapporto R tra U_i (energia potenziale prima dell'inserimento della lastra) ed U_f (energia potenziale dopo l'inserimento della lastra).

8) $$R = \frac{U_i}{U_f} = \frac{\frac{\cancel{q^2}}{\cancel{2}C_i}}{\frac{\cancel{q^2}}{\cancel{2}C_f}} = \frac{C_f}{C_i} = \frac{\frac{\cancel{\varepsilon_0 A}}{d-b}}{\frac{\cancel{\varepsilon_0 A}}{d}} = \frac{d}{d-b} = \frac{5\cdot 10^{-3}\,\cancel{m}}{3\cdot 10^{-3}\,\cancel{m}} = 1{,}67$$

in cui C_f è semplicemente la capacità elettrica C calcolata nel punto A e C_i è la definizione di capacità elettrica per un condensatore piano a facce parallele senza alcuna modificazione dell'espressione.

- Punto C

Trovandoci in all'interno di un campo di forze conservativo, cioè quello del campo elettrico, il lavoro svolto dalle forze del campo è pari alla variazione dell'energia potenziale:

9) $$L = \Delta U = U_f - U_i$$

in cui U_i è l'energia prima dell'inserimento della lastra ed U_f è l'energia successiva all'inserimento della lastra. Ovviamente L sarà il lavoro proprio delle forze del campo.
Sostituendo la (7) alla (9) con le relative capacità otteniamo che:

10) $$L=\Delta U=U_f-U_i=\frac{q^2}{2C_f}-\frac{q^2}{2C_i}=\frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_f}-\frac{1}{C_i}\right)=\frac{q^2}{2}\left(\frac{d-b}{\varepsilon_0 A}-\frac{d}{\varepsilon_0 A}\right)=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}(\cancel{d}-b-\cancel{d})=-\frac{q^2 b}{2\varepsilon_0 A}=-\frac{(3{,}50\cdot 10^{-6}\,\cancel{C})^2\cdot 2\cdot 10^{-3}\,m}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\cancel{C}^2}{N\cdot \cancel{m}^2}\cdot 2{,}40\cdot 10^{-4}\,\cancel{m}^2}=-5{,}44\,J$$

L’assenza del segno negativo al ***ΔU*** sta ad indicare che noi vogliamo trovare appunto il lavoro fatto in relazione alla variazione di energia potenziale.
Detto in altri termini:
il lavoro è negativo, implica che $U_f < U_i$; questa diminuzione di energia(grazie al principio di conservazione dell’energia) si è trasformata in lavoro eseguito dalle forze del campo per attrarre la lastra; questo conferma il segno negativo di ***L***.