Liceo Scientifico Tecnologico

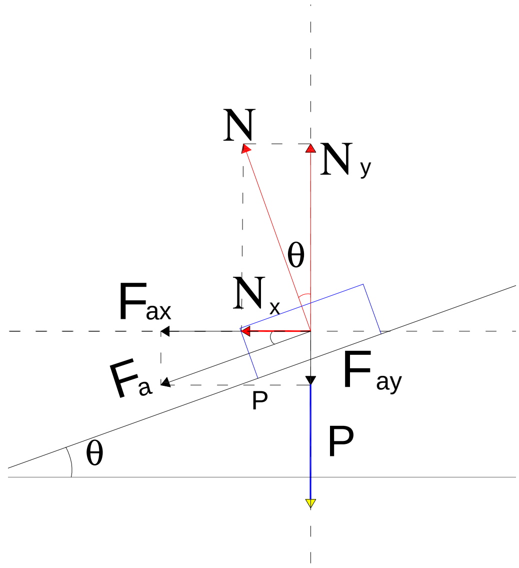
Classe 3° LST A
a.s. 2007/2008

ESERCIZIO
Moto di un corpo su una pista sopraelevata (curva bilanciata)

Sviluppo curato da: *Pierluigi Casasanta*
Docente: prof. Quintino d'Annibale

Testo : un corpo sta affrontando in presenza di attrito una curva bilanciata di angolo θ , si calcoli la massima e la minima velocità con cui il corpo può affrontare la curva senza uscire di strada.

A) CASO CON ATTRITO



Formule:
1_ $P = m \mathbf{g}$
2_ $Fa = \mu N$
3_ $Fc = m V^2/r$

Svolgimento:
- si analizzano le forze che agiscono sul Corpo, esse sono**:**
la forza normale N scomposta in Nx e Ny
la forza d'attrito diretta verso il basso scomposta in Fax e Fay
il peso P

$\sum Fy = m\, ay$

$\sum Fx = m\, ax$

Dato che il corpo si muove su una curva di raggi r orizzontalmente si deduce che:
$ay = 0$
$ax = V^2/r$

Quindi:

$\sum Fy = -Fay - P + Ny = 0 \longrightarrow$ **$Ny = Fay + P$**

$\sum Fx = Fc = Fax + Nx$

Si sostituiscono le componenti di N e Fa nell'equazioni suddette che sono

$$Ny = N \cos\theta \qquad Nx = N \operatorname{sen}\theta$$

$$Fay = Fa \operatorname{sen}\theta \qquad Fax = Fa \cos\theta$$

$$N \cos\sigma = Fa \operatorname{sen}\theta + m g$$

$$m V^2/r = Fa \cos\theta + N \operatorname{sen}\theta$$

Dalla formula 2 si sostituisce Fa lasciando come incognita N.

$$N \cos\theta = \mu N \operatorname{sen}\theta + m g$$

$$m V^2/r = \mu N \cos\theta + N \operatorname{sen}\theta$$

Risolvere le due equazioni

$$N (\cos\theta - \mu \operatorname{sen}\theta) = m g$$

$$m V^2/r = N (\mu \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$$

Mettere a sistema le due equazioni e ricavare V (Vmax)

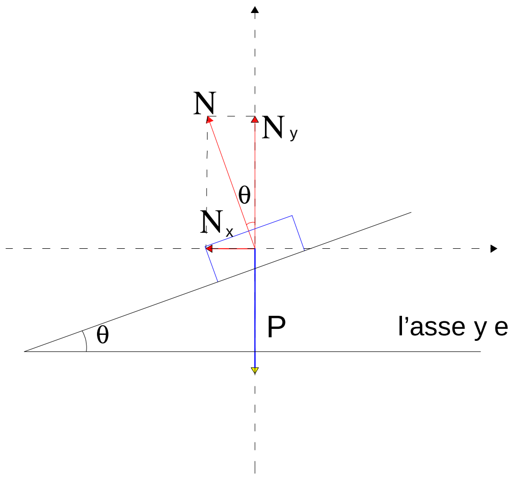
1)
$$V = \sqrt{r \cdot g \cdot \frac{(\mu \cos\theta + sen\theta)}{\cos\theta - \mu \cdot sen\theta}}$$

Se la forza di attrito è diretta verso l'alto si ha :V(Vmin)

1$_1$)
$$V = \sqrt{r \cdot g \cdot \frac{(\mu \cos\theta - sen\theta)}{\cos\theta + \mu \cdot sen\theta}}$$

B) CASO SENZA ATTRITO

Si confronti il risultato precedente con il caso senza attrito.



Formule:
1_ P = m **g**
2_ Fa = μ N
3_ Fc = m V^2/r

Svolgimento:
Si analizzano le forza agenti sul corpo:
-la forza peso
-la forza normale scomposta nella sua componente lungo l'asse y e lungo l'asse x

$\sum$Fy = m ay

$\sum$Fx = m ax

Anche in questo caso dato che il corpo si muove solo orizzontalmente si deduce che:

ay = 0
ax= V^2/r

Quindi:

$\sum$Fy = - P + Ny = 0 **Ny = P**

$\sum$Fx = Fc = Nx

A queste due equazioni si vanno a sostituire le componenti di Ny e di Nx:

Ny = N cos θ Nx = N sen θ

N cos θ = m g

m V^2/r = N sen θ

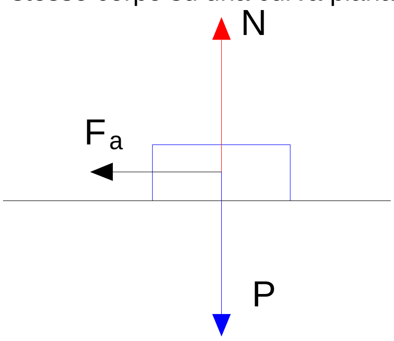
Si ricavi V:

2) $V = \sqrt{r \cdot g \cdot tg\theta}$

A questo punto confrontando le formule di **V** ottenute, si puo affermare che la 2 rappresenta la **1** proprio quando μ è zero ,ovvero in assenza di attrito.
Nella **1** grazie alla forza d'attrito che mantiene il corpo su quel raggio di curvatura la velocità potrà essere più elevata rispetto alla **2**, in cui il corpo non essendo sotto l'influenza dell'attrito dovrà mantenere quella V(minore di V1) costante.
Dico costante perché se la velocità aumentasse o diminuisse il corpo tenderebbe a cambiare il raggio di curvatura

CONFRONTO CON CURVA PIANA (sbilanciata)

Confrontiamo ora il moto di un corpo su una sopraelevata e il moto dello stesso corpo su una curva piana



Formule:

1_ P = m g
2_ Fa = µ N
3_ Fc = m V^2/r

Dato che il corpo si muove solo orizzontalmente:

$N = P \longrightarrow N = m\,g$

Dato che la forza d'attrito è l'unica forza dirette verso il centro della curva rappresenta la forza centripeta:

$Fa = Fc \longrightarrow \mu\, N = m\, V^2/r$

Risolvendo le due equazioni in funzione di V:

3) $$V = \sqrt{r \cdot g \cdot \mu}$$

CONCLUSIONI

Le due formule (1e3) come si può notare si differenziano solo per un termine, per vedere quale delle due velocità è più grande, e se conviene quindi costruire curve bilanciate, non si deve far altro che confrontare:

$$V = \sqrt{r \cdot g \cdot \mu} \quad \textbf{con} \quad V = \sqrt{r \cdot g \cdot \frac{(\mu \cos\theta + sen\theta)}{\cos\theta - \mu \cdot sen\theta}}$$

È facile constatare come per valori di θ>0 si ha sempre:

$$\mu < \frac{\mu \cos\theta + sen\theta}{\cos\theta - \mu sen\theta}$$

Si può facilmente verificare quanto detto con un esempio, Attribuiamo un valore qualsiasi a µ: 0,4 e all'angolo θ: 10° e risolviamo:
il risultato ottenuto conferma quanto asserito.

Quindi si può concludere dicendo che le curve bilanciate sono state inventate per un valido motivo !!!!

Pierluigi Casasanta