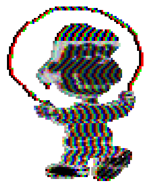
Fisica



Dispense del Corso di Fisica

a.s. 2011-2012

Prof. Quintino d'Annibale

Meccanica

Lezione

Statica dei corpi rigidi

DEFINIZIONI

Si definisce CORPO RIGIDO un corpo, giacente nello spazio o nel piano, che sotto l'azione di forze che agiscono su di esso risulta indeformabile, capace di muoversi "rigidamente", ossia in modo tale che resti invariata la posizione relativa di un suo punto generico rispetto agli altri punti che lo costituiscono.

Si dice LIBERO un corpo che non ha impedimenti (vincoli) che lo leghino all'ambiente in cui si trova e quindi può muoversi liberamente in tutti i modi possibili .

Si definisce GRADO DI LIBERTÁ, i possibili movimenti che un corpo può compiere. dicono.

Si definisce VINCOLO, quell'organismo capace di impedire uno o più movimenti (GRADO DI LIBERTÁ) di un corpo.

Si dice VINCOLATO un corpo a cui, per mezzo di opportuni vincoli, viene impedito uno o più movimenti.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

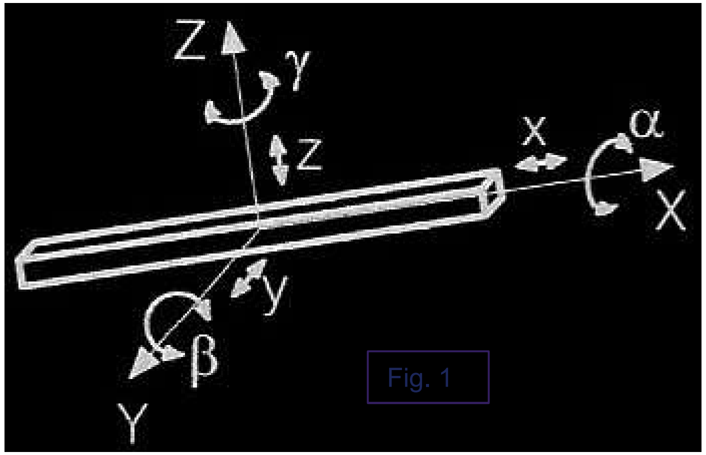


Fig. 1

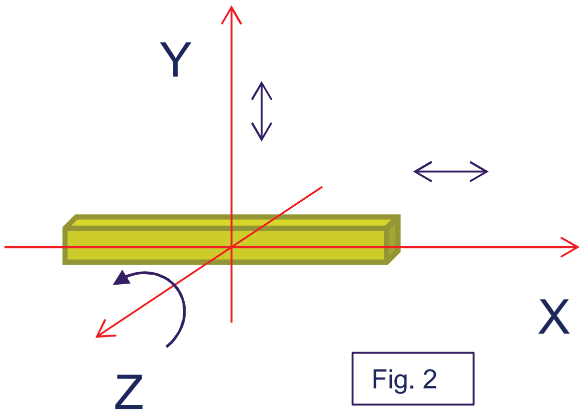


Fig. 2

Un corpo rigido libero nello spazio possiede sei gradi di libertà (cioè possibilità di movimento) coincidenti con le tre traslazioni possibili lungo gli assi coordinati X, Y e Z e le tre rotazioni intorno agli stessi assi (fig. 1).

Qualunque movimento, comunque complesso, del corpo rigido può essere scomposto in uno o più dei suddetti movimenti elementari.

Se studiamo il corpo su un piano anziché nello spazio (cioè vincolato a rimanere su di esso es. X,Y) , i gradi di libertà possibili si riducono a tre e cioè: due traslazioni: lungo l'asse X e lungo l'asse Y ed una rotazione intorno all'asse Z pensato come origine degli assi (fig. 2).

Anche in questo caso, un qualsiasi movimento del corpo rigido nel piano, può essere scomposto in uno o più dei tre movimenti elementari detti.

Ci dedicheremo allo studio dei corpi rigidi nel piano soggetti a vincoli che, come abbiamo detto, servono a sottrarre gradi di libertà al sistema fino a porlo in condizioni di equilibrio statico.

ALCUNI TIPI DI VINCOLI

CARRELLO o VINCOLO SEMPLICE

schematizzato come un corpo triangolare provvisto di ruote su guide e di una cerniera a cui è solidale il corpo rigido (rappresentato da un'asta) come si vede in fig. 3, dove sono evidenti i due gradi di libertà restanti all'asta così vincolata, cioè la rotazione intorno al punto A e la traslazione lungo la guida (cioè l'asse X), mentre viene impedito il movimento traslatorio perpendicolare alla guida (cioè lungo l'asse Y) che è l'unico grado di libertà sottratto da questo vincolo al corpo rigido.

Naturalmente, il carrello, per poter impedire tale movimento dovrà comunicare all'asta una forza (reazione vincolare) perpendicolare alla guida (R_{AY}) (fig. 4).

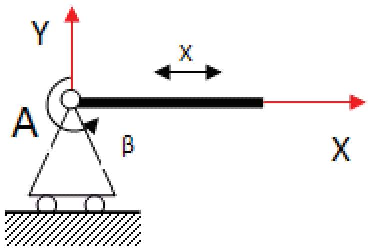


Fig. 3

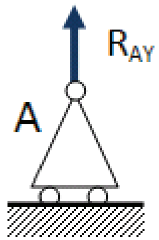


Fig. 4

ALCUNI TIPI DI VINCOLI

CERNIERA o VINCOLO DOPPIO

schematizzato come un corpo triangolare fisso con una cerniera a cui è solidale l'asta come si vede in fig. 5. L'unico grado di libertà restante all'asta, così vincolata, è la rotazione intorno alla cerniera mentre sono impedite le due traslazioni lungo l'asse X e lungo l'asse Y. Ovviamente, la cerniera, per poter impedire tali movimenti dovrà comunicare all'asta due reazioni vincolari, una parallela all'asse X (R_{AX}) ed una parallela all'asse Y (R_{AY}) (fig. 6).

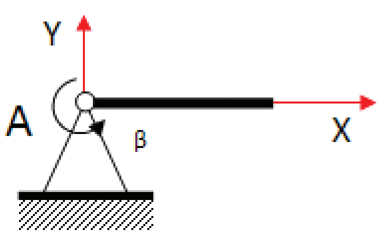


Fig. 5

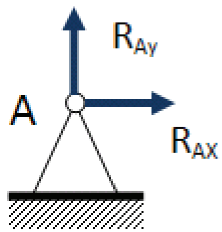


Fig. 6

ALCUNI TIPI DI VINCOLI

INCASTRO o VINCOLO TRIPLO

schematizzato semplicemente con una linea sottotratteggiata nella quale è conficcata l'asta (come in un muro), a mensola (fig. 7). L'incastro toglie all'asta tutti e tre i gradi di libertà impedendone ogni possibilità di movimento. Per poter fare ciò dovrà dare tre reazioni vincolari, una parallela all'asse X (R_{AX}), una parallela all'asse Y (R_{AY}) ed un momento reagente (M_A) detto momento d'incastro (fig. 8).

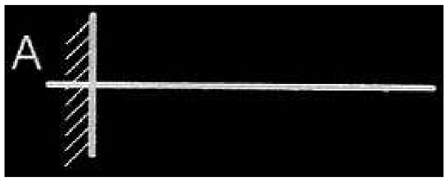


Fig. 7

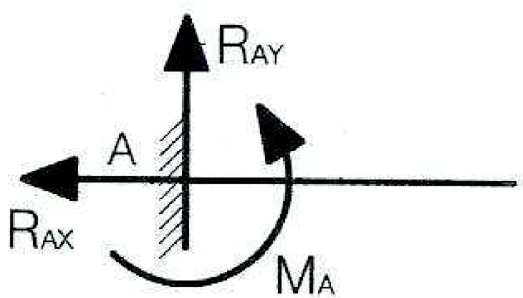


Fig. 8

ASTE VINCOLATE

Le aste possono essere vincolate in vario modo, utilizzando uno o più vincoli a seconda del tipo di sistema che vogliamo ottenere.

SISTEMA LABILE

Se il numero di gradi di gradi di libertà sottratti è inferiore a tre, come nel caso di utilizzo di un solo carrello o di una sola cerniera, il sistema si dice LABILE essendo ancora in grado di muoversi, (questo vale anche se i gradi di vincolo pur uguali a tre non sono disposti in modo idoneo.)

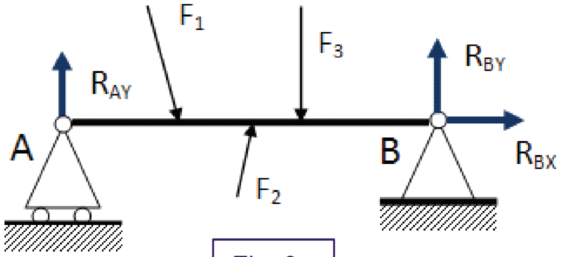


Fig. 9

SISTEMA ISOSTATICO

Il sistema si dice ISOSTATICO, se il numero di gradi di libertà sottratti e esattamente pari a tre come nel caso di impiego di un incastro o di tre carrelli (opportunamente disposti) o di un carrello e di una cerniera (fig. 9).

SISTEMA IPERSTATICO

Il sistema si dice IPERSTATICO, se il numero dei vincoli è sovrabbondante supera tre.

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

RICERCA DELLE REAZIONI VINCOLARI CON LE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Per i sistemi isostatici, di cui ci occuperemo, il primo problema da risolvere e la determinazione delle reazioni vincolari (cioè delle forze offerte dai vincoli) necessarie ad equilibrare il sistema soggetto ai carichi esterni. I dati del problema sono i carichi, noti per entità e posizione, la tipologia dei vincoli e la lunghezza complessiva della trave. Le incognite del problema sono appunto le reazioni vincolari che dovranno essere calcolate in modulo,

direzione e verso, per risolvere le incognite del problema si ricorre all'applicazione delle

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$\sum \vec{F}_x = 0$$
$$\sum \vec{F}_Y = 0$$
$$\sum M_p = 0$$

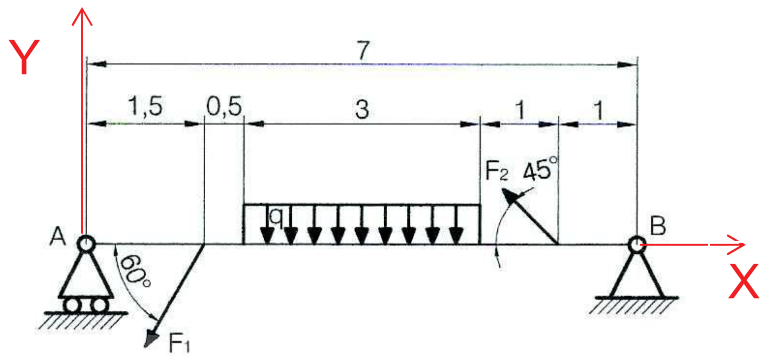
devono essere soddisfatte contemporaneamente, si tratterà di risolvere un sistema lineare di tre

equazioni in tre incognite, che ci consentirà di conoscere le intensità ed i versi delle reazioni vincolari.

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Esempio applicativo

Per fissare le idee, supponiamo di avere la trave isostatica rappresentata in figura che risulta caricata con due carichi concentrati inclinati e, per un tratto, con un carico ripartito. Siano date le dimensioni della trave con le posizioni dei carichi e si abbiano $F_1 = 1500\ N$, $F_2 = 1000\ N$ e $q=500\ N/m$



Per prima cosa (fig. 10) ridisegniamo la trave in un sistema di assi cartesiani immaginato con origine nel punto A, asse X positivo verso destra e asse Y positivo verso l'alto. Quindi sostituiamo i carichi inclinati con le rispettive componenti nelle direzioni X e Y, i carichi ripartiti con i loro carichi complessivi, posizionati nel loro baricentro, ed infine, sostituiamo i vincoli con le rispettive reazioni vincolari. Tutto come in fig. 10, per la quale avremo:

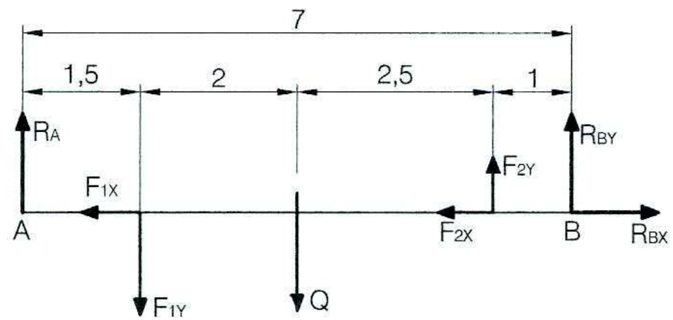


Fig. 10

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

1. Determiniamo inizialmente le componenti delle forze applicate e il valore Q del carico ripartito;

$$F_{1X} = F_1 \cos(60°) = 1500N \cdot \frac{1}{2} = 750N$$

$$F_{1Y} = F_1 sen(60°) = 1500N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1299N$$

$$Q = q \cdot l_q = 500\frac{N}{m} 3m = 1500N$$

$$F_{2X} = F_2 \cos(45°) = 1000N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 707N$$

$$F_{2Y} = F_2 sen(45°) = 1000N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 707N$$

2. Studiamo l'equilibrio del corpo, applicando l'equazioni cardinali della statica

$$\begin{Bmatrix} 1)\sum F_X = 0 \\ 2)\sum F_Y = 0 \\ 3)\sum M_A = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -F_{1X} - F_{2X} + R_{BX} = 0 \\ R_A - F_{1Y} - Q + F_{2Y} + R_{BY} = 0 \\ F_{1Y} \cdot 1{,}5 + Q \cdot 2 - F_{2Y} \cdot 6 - R_{BY} \cdot 7 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -750 - 707 + R_{BX} = 0 \\ R_A - 1299 - 1500 + 707 + R_{BY} = 0 \\ 1948{,}5 + 5250 - 4242 - R_{BY} \cdot 7 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{BX} = 750 + 707 = 1457N \\ R_A = 2092 - R_{BY} = 1670N \\ R_{BY} = \dfrac{2956{,}5}{7} = 422N \end{Bmatrix}$$

Abbiamo determinato le tre reazioni cercate, che risultano di segno positivo, ad indicare che il verso arbitrariamente scelto (vedi figura 10) è esatto.
Nel caso uno o più, fossero di segno negativo, indicherebbe che i versi giusti per quelle reazioni sono opposti a quelli scelti in modo arbitrario.

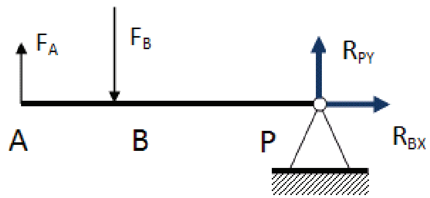
EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Esempio n°2 – da Halliday Resnick cap.12 n°15

La figura presenta le strutture anatomiche della gamba e del piede che intervengono nella posizione di danza sulle punte, con il tal-lone sollevato dal suolo e il piede che tocca il terreno soltanto per un punto, indicato con *P* nella figura. Calcolate, per una persona di peso *p* = 900 N, (a) il modulo e (b) la direzione della forza che deve esercitare sul piede il muscolo del polpaccio, in *A.* Trovate (e) il modulo e (d) la direzione della forza che devono esercitare le ossa del tratto inferiore della gamba (in *B),* quando la persona deve stare in piedi sulla punta di un solo piede. Si ponga *a* = 5,0 cm e *b* = 15 cm.

Soluzione

Si può schematizzare il sistema come da figura e applicare le equazioni cardinali della statica, tuttavia si può vedere come in X non ci sono azioni, quindi anche la ***R_{BX}* = 0,** e ***R_{BY}* = *p*=900N,** ci limitiamo pertanto alle equazioni:



$$2)\sum \vec{F}_Y = 0$$
$$3)\sum M_p = 0$$

Dalla 2) $F_A - F_B + R_{PY} = 0$

3) $-F_A \cdot (a+b) + F_B \cdot b = 0$

$$F_A = \frac{F_B \cdot b}{a+b} = F_B \frac{15cm}{(5+15)cm} = \frac{3}{4} F_B$$

$$sostituendo\_nella\_2 \Rightarrow \frac{3}{4} F_B - F_B + R_{PY} = 0 \Rightarrow F_B\left(\frac{3}{4} - 1\right) = -R_{PY} = -900N$$

$$F_B = 4 \cdot 900N = 3600N$$

$$F_A = \frac{3}{4} F_B = \frac{3}{4} 3600 = 2700N$$