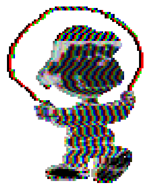
Fisica



Dispense del Corso di Fisica

a.s. 2009-2010

Prof. Quintino d’Annibale

Meccanica

Lezione 1

Grandezze fisiche
incertezza nella misura

Grandezze Fisiche

- Ogni grandezza fisica e composta da un numero e da una unità. Le leggi fisiche indicano relazioni tra grandezze fisiche. Le unita utilizzate per le grandezze fisiche sono state stabilite dal Sistema Internazionale di Unità (sistema SI).

- Le grandezze fisiche si dividono in due tipi
  a) grandezze fondamentale: sono quelle direttamente misurabili e rappresentano il minimo numero di grandezze necessarie per descrivere i fenomeni fisici;
  b) grandezze derivate: sono tutte le altre grandezze che si possono scrivere in funzione di grandezze fondamentali

Grandezze fondamentali

Il Sistema Internazionale è basato sulle seguenti grandezze fondamentali e le loro unita di misura:

Grandezza	Simbolo	Simbolo di base	Simbolo di unità
Lunghezza	L	metro	m
Massa	M	kilogrammo	kg
Tempo	T	secondo	s
Intensità di corrente elettrica	A	Ampere	A
Temperatura	T	Kelvin	K
Intensità luminosa	Cd	Candela	Cd

Grandezze derivate

Le grandezze derivate, possono essere sempre espresse coma una composizione di grandezze fondamentali. Alcune grandezze derivate sono:

Grandezza	Definizione	Unità	Nome
Frequenza	1/Secondo	[T-1]	Hertz, Hz
Forza	Massa x Accelerazione	[MLT-2]	Newton, N
Pressione	Forza/Area	[ML-1T-2]	Pascal, Pa
Lavoro, energia	Forza x Distanza	[ML2T-2]	Joule, J
Potenza	Lavoro/Tempo	[ML-1T-3]	Watt, W
Carica elettrica	Corrente x Tempo	[AT]	Coulomb, C

Analisi Dimensionale

Le dimensioni possono essere trattate come grandezze algebriche. Le grandezze si possono sommare o sottrarre soltanto se hanno le stesse dimensioni.

Ambedue i membri di un'equazione devono avere le stesse dimensioni
(il principio di omogeneità dimensionale)

Possiamo usare l'analisi dimensionale come controllo per determinare se un'equazione abbia o no una forma corretta. Per esempio, nella meccanica intervengono soltanto tre grandezze, M, L e T. Data una grandezza meccanica G, come una forza F, la sua equazione dimensionale si esprime in
generale come:

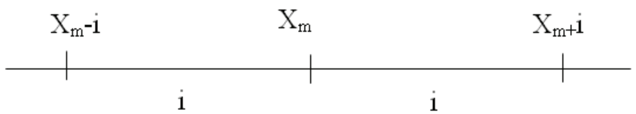
$$[G] = [M]a[L]b[T]c$$

dove a, b e c sono numeri che stabiliscono da quale potenze delle grandezze fondamentale dipende la grandezza derivata G (controllo dimensionale)

richiami

Incertezza nella misura

- Nelle misurazioni si commettono inevitabilmente errori di entità non valutabile, le misure che si ottengono sono sempre **incerte.** Molto spesso si legge che *una* **misura** *è affetta da un certo* **errore;** ma ciò non è corretto, perché fa pensare che sia possibile conoscere la misura vera della grandezza considerata (basterebbe infatti aumentare o diminuire il risultato della misurazione di una quantità pari all'errore). È invece corretto dire che nell'eseguire le misurazioni si commettono degli errori non esattamente quantificabili e che, di conseguenza, le misu-re sono incerte.
- Detto ciò possiamo utilizzare il termine errore, senza attribuirgli un significato errato.
- Nelle misure si riscontrano du tipi di errori:
  - Sistematici
  - Casuali o accidentali
- I primi sono eliminabili se si conosce la loro causa (es. uno strumento che non funziona bene, basta sostituirlo)
- Per i secondi, occorre ricorrere alla loro elaborazione chiamata comunemente, teoria degli errori, si tratta di valutazione anche statistica a seconda del numero delle misure.
- Le misure vengono scritte nella forma: $\boxed{X = (X_m \pm i)}$



Dove $\mathbf{X_m}$ è il valor medio e ***i*** l'incertezza assoluta, esso sottolinea che la misura è compresa tra

X_m-i e X_m+i

$$X_m = \frac{\sum_1^n X_i}{n}$$

Si definiscono inoltre:

Incertezza relativa $$i_r = \frac{i}{X_m}$$

incertezza percentuale: $$i_{\%} = i_r \cdot 100$$

richiami

Incertezza nella misura

- Se le misure sono molte, conviene raggrupparle in classi (cioè riunire tutte quelle uguali tra loro) e determinare la frequenza di ciascuna classe; per esempio: se un certo valore x_i compare 8 volte, la sua frequenza è $f = 8$; se un altro valore $\boldsymbol{x_i}$ compare 20 volte, la sua frequenza è 20.
- La somma di tutti i valori si può esprimere nel seguente modo:

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n = \Sigma x_i f_i$$

e il loro numero complessivo è:

$$N = f_1 + f_2 + \ldots + f_n = \Sigma f_i$$

Per cui, il valore medio X_m si può esprimere nella forma :

richiami

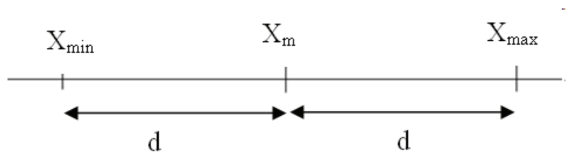
Incertezza nella misura

Nella teoria degli errori, occorre distinguere due casi :

affermare di avere un campione statisticamente rappresentativo, quindi non possiamo utilizzare le regole della statistica. Possiamo tuttavia informare sul risultato della misura, dichiarando oltre al valor medio, l'intervallo entro il quale sono cadute <u>tutte</u> le nostre misure. Daremo in questo modo una informazione sull'accuratezza con il quale abbiamo lavorato, dobbiamo tuttavia sottolineare che più ampio è l'intervallo e meno affidabile è la misura.

Semidispersione massima

il calcolo della ***incertezza i*** si effettua con il metodo della note tutte le misure, l'intervallo d'incertezza va dal valore min al max, e la " *d* ", si ottiene dividendo a metà questo l'intervallo:



Incertezza nella misura

Quando il numero di misure effettuate è alto (>30), si entra nel campo della statistica. Si introduce un indice chiamato *scarto quadratico medio* o *deviazione standard* di una distribuzione di dati. Come si vedrà, esso assume anche significato particolare.

Introduciamo a tal proposito il termine ***scarto*** dalla media:

$$S = X_i - X_m$$

È evidente che ad ogni misura è associato il proprio scarto:

$$s_1 = X_1 - X_m .....s_2 = X_2 - X_m ....s_n = X_n - X_m$$

Va sottolineato che lo scarto può essere positivo o negativo, inoltre la loro somma è zero, come la loro media aritmetica

$$\sum s_i = 0$$

Definiamo lo *scarto quadratico medio* come: $\sigma = \sqrt{\dfrac{s_1{}^2 + s_2{}^2 + ...+ s_n{}^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum s_i{}^2}{n}}$

Il risultato della misura sarà del tipo: $X = (X_m \pm \sigma)$

Incertezza nella misura

Distribuzione di frequenza e curva di Gauss

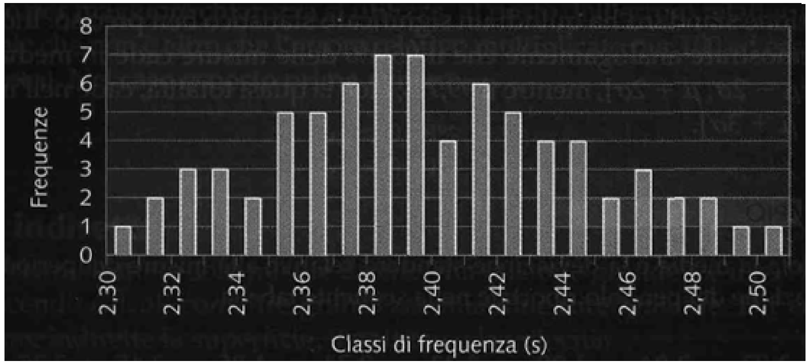
Numero di volte	Periodo (s)
1	2,30
2	2,31
3	2,32
3	2,33
2	2,34
5	2,36
6	2,37
7	2,38
7	2,39
4	2,40
6	2,41
5	2,42
4	2,43
4	2,44
2	2,45
2	2,48
1	2,49
1	2,50

In un insieme di misure con l'espressione «frequenza di una misura» indichiamo il numero di volte che questa misura compare nell'insieme. Supponiamo di aver effettuato 75 volte la misura del periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro al centesimo di secondo e di aver ottenuto i risultati riportati in tabella. Chiamiamo classe di frequenza ogni gruppo di misure. è ovvio che nell'effettuare il calcolo della media si è molto avvantaggiati se le misure sono espresse in classi di frequenza (come evidenziato precedentemente).

È interessante dare una rappresentazione grafica della distribuzione delle frequenze riportando in ascissa gli intervalli di frequenza e in ordinata le frequenze.

$$X_m = \frac{\sum_1^n f_i X_i}{\sum_1^n f_i}$$

Grafico delle frequenze



Incertezza nella misura

Distribuzione di frequenza e curva di Gauss

Come si può notare dall'istogramma, le misure sono più addensate verso il centro (nel nostro esempio il valor medio è 2,39) e meno verso gli estremi del grafico; inoltre la forma dell'istogramma è approssimativamente simmetrica rispetto al valor medio. Ciò si spiega dicendo che il risultato della misura è affetto da un'imprecisione del tutto casuale e che, quindi, sarà ugualmente probabile avere uno scarto per difetto o per eccesso. L'insieme di valori misurati a cui abbiamo fatto riferimento nel nostro esempio costituisce una «distribuzione sperimentale» e l'istogramma è una sua rappresentazione grafica.

Nella teoria statistica dimostriamo che, in presenza di soli errori di misura casuali in eccesso e in difetto con la stessa probabilità, al crescere del numero delle misure tutte le distribuzioni sperimentali tendono ad assumere la stessa forma, rappresentata da una curva particolare chiamata o curva a campana.

Attraverso la curva di Gauss è possibile rilevare alcune proprietà:

L'area della parte di piano racchiusa dalla curva normale, dall'asse delle ascisse e dalle rette verticali passanti per i punti di flesso ($X_m \pm \sigma$) della curva corrisponde, al 68,3% dell'area totale racchiusa dalla curva e dall'asse delle ascisse.

Si dimostra che le misure cadono:

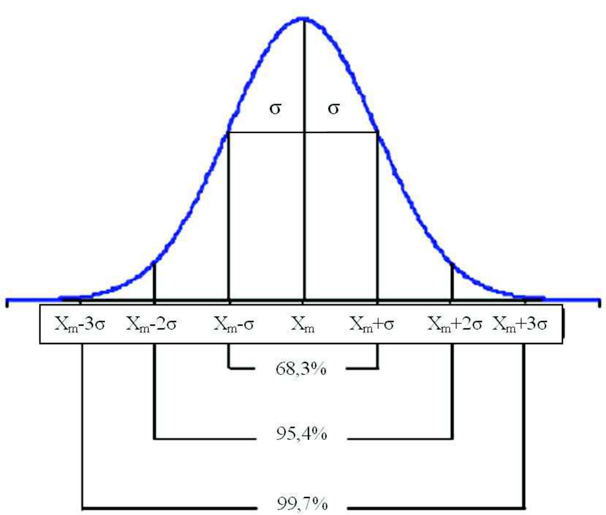


Grafico delle frequenze

Meccanica

Lezione 2

Grandezze scalari

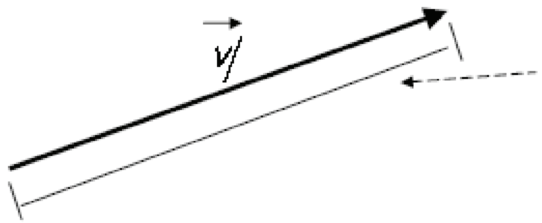
Grandezze vettoriali

Grandezze scalari e vettoriali

Le grandezze scalari sono definiti solamente da un numero. Esempi sono una massa, il tempo, la densità, la temperatura.

Spesso però nella fisica vengono utilizzate grandezze per le quali e necessaria l'indicazione sia da un valore numerico che di una direzione. Esempi sono una velocità, una forza, l'accelerazione, il campo elettrico. Esse sono chiamati vettori.

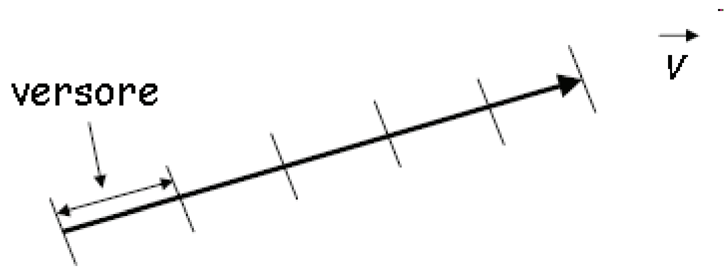
Un vettore e dunque una grandezza geometrica definita da modulo, direzione e verso. Sono caratterizzate da una freccia posta sopra il simbolo della grandezza corrispondente, ad esempio, per una velocità,



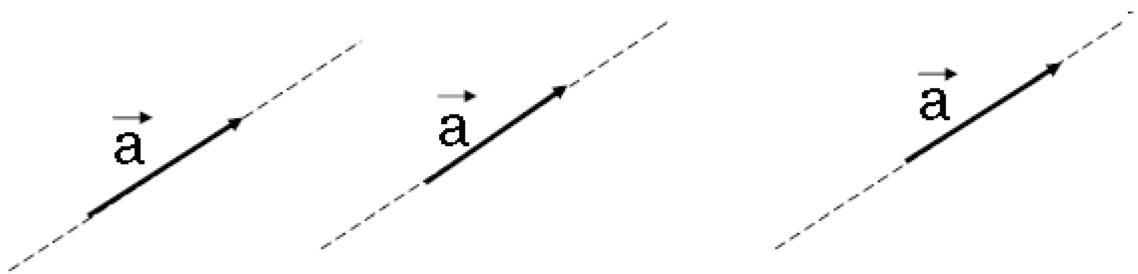
Modulo = lunghezza del segmento che rappresenta il vettore. Il modulo viene rappresentato da |v|, oppure da v

Versori

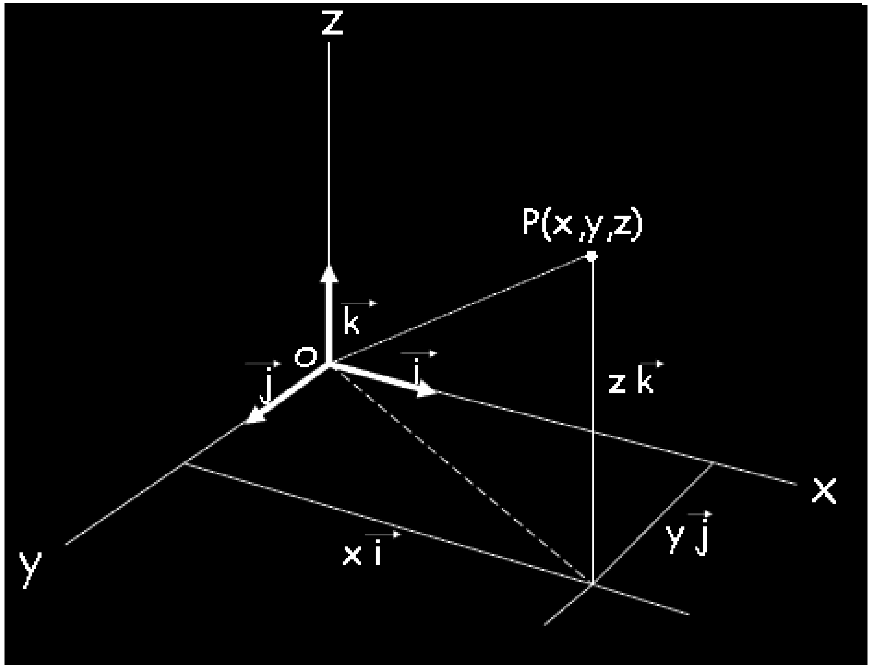
Si definisce un . Serve a individuare una direzione. Nel esempio precedente:



In questo esempio il vettore velocità è composto da cinque unita del versore unitario.
Dato un vettore , si può definire infiniti altri vettori uguali trasportando il vettore parallelamente a se stesso.



Sistema di coordinate Cartesiane

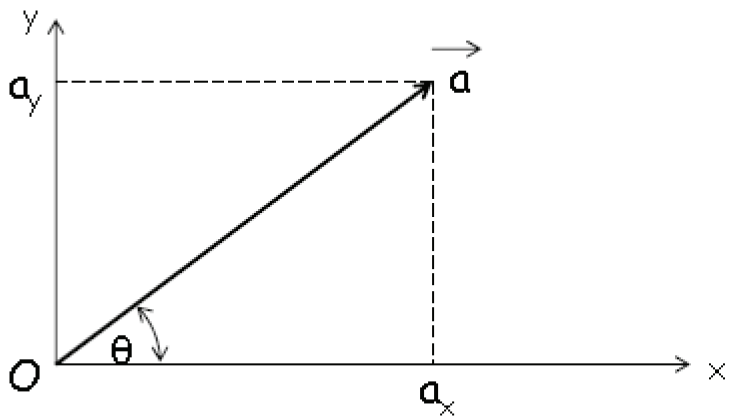


Determinazione di vettore posizione di un punto P(x,y,z) in un sistema di coordinate Cartesiane ortogonali tridimensionale con versori (ciascuno con modulo unitario) ed origine O.

$$\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}$$

Componenti di un vettore

Un qualsiasi vettore può essere scomposto in componenti rispetto ad un sistema di riferimento. Prendiamo un riferimento di assi Cartesiane con origine O in due dimensioni. Tracciando le perpendicolari dall'estremo del vettore agli assi (x,y), si ottiene i componenti a_x, a_y del vettore rispetto al sistemi di riferimento, con θ l'angolo che il vettore forma con l'asse x.



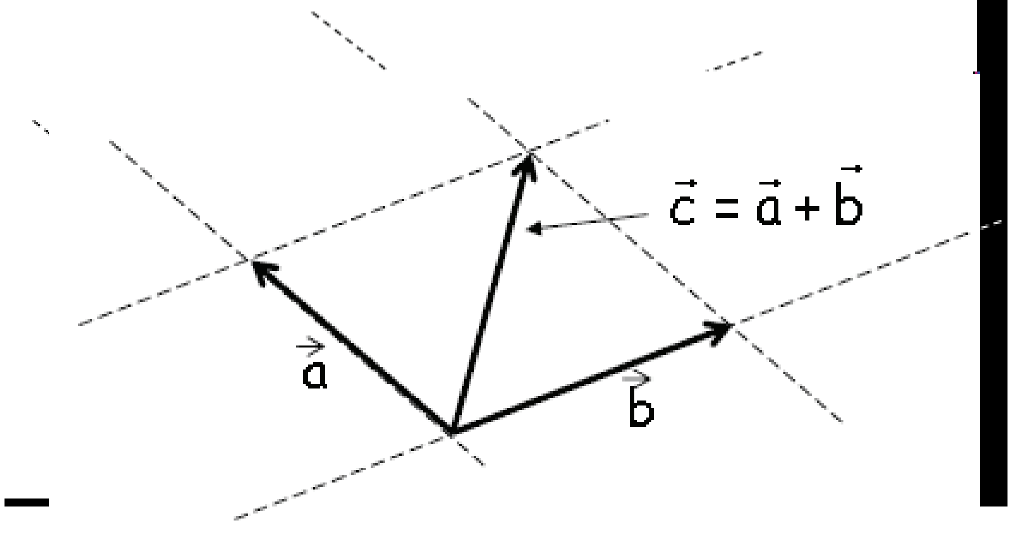
$a_x = a\cos(\theta)$ $a_y = a\,\mathrm{sen}(\theta)$ $\tan(\theta) = a_y/a_x$

Inoltre, il modulo del vettore, per il teorema di Pitagora è $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Operazioni vettoriali

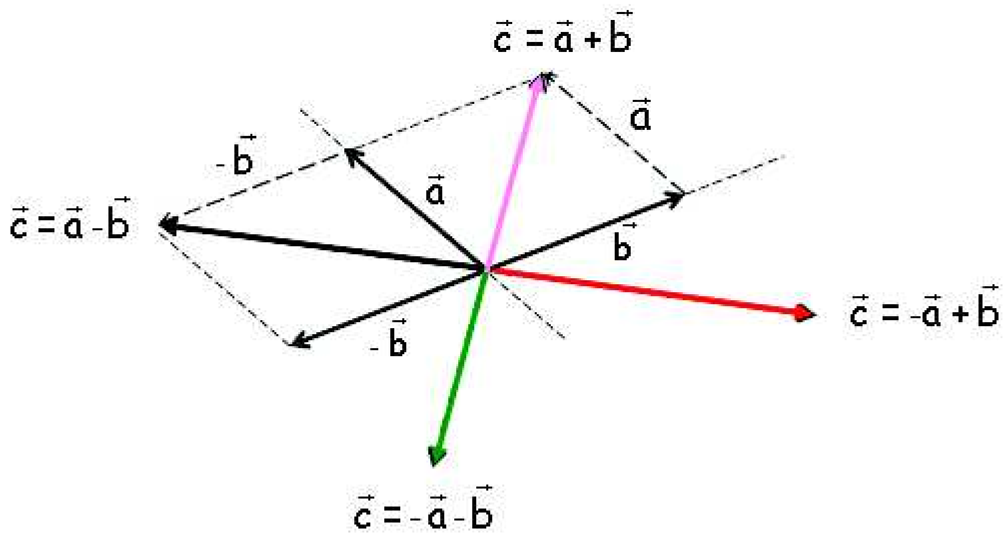
Dal prodotto di un vettore **a** per uno scalare A si ottiene un nuovo vettore, **b** che ha la stessa direzione di **a**, ma modulo A volte di **a**, lo stesso verso e (se A >0) o opposto (se A < 0).

Si sommano due vettori **a** e **b** per ottenere la loro somma **c**



Operazioni vettoriali

Per fare la differenza fra due vettori **a** e **b** (**c** = **a** – **b)** si esegue la somma tra **a** e – **b**, **c** = **a** + (-**b**)



Operazioni vettoriali

Conoscendo i componenti dei singolo vettori, è molto più semplice e comodo fare la somma (+) o la differenza (-) di due o più vettori. In seguito a quanto visto prima e vogliamo fare la somma di seguenti due vettori tridimensionale dati da:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = a_x\vec{i} \pm a_y\vec{j} \pm a_z\vec{k} \pm b_x\vec{i} \pm b_y\vec{j} \pm b_z\vec{k}$$

$$= (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

$$= c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$$

Il modulo della somma e dato da

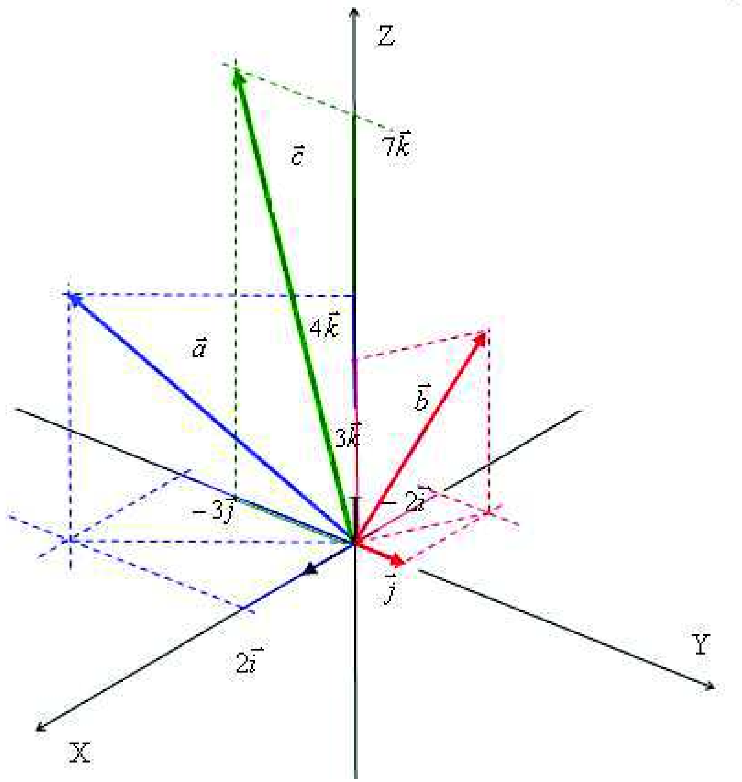
$$c = \sqrt{(a_x \pm b_x)^2 + (a_y \pm b_y)^2 + (a_z \pm b_z)^2} = \sqrt{c_x^{\ 2} + c_y^{\ 2} + c_z^{\ 2}}$$

Operazioni vettoriali

Esempio: calcolare la somma dei seguenti due vettori:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$= (2-2)\vec{i} + (-3+1)\vec{j} + (4+3)\vec{k} = -2\vec{j} + 7\vec{k}$$



Il modulo della somma e dato da

$$c = \sqrt{(2-2)^2 + (-3+1)^2 + (4+3)^2}$$
$$= \sqrt{4+49} = 7,28$$

Come è possibile constatare, il metodo grafico è di gran lunga più difficoltoso.

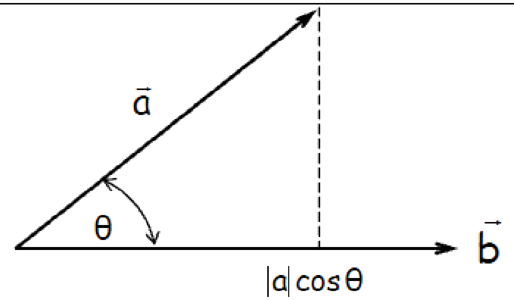
Operazioni vettoriali

Prodotto tra vettori

Esistono due modi per moltiplicare i vettori:

Si indica con (**·**), **i**l risultato del prodotto scalare tra due vettori e uno scalare, cioè un numero. Esso, è dato dal prodotto dei moduli di ciascun vettore per il coseno dell’angolo compreso tra le direzioni dei due vettori.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|\cos\theta$$



$\theta = 0°$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|$ $\theta = 90°$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\theta = 180°$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|a||b|$

Operazioni vettoriali

Proprietà del Prodotto scalare

Dati due vettori: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ $\quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

Il prodotto scalare è dato da:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x(\vec{i}\cdot\vec{i}) + a_xb_y(\vec{i}\cdot\vec{j}) + a_xb_z(\vec{i}\cdot\vec{k}) +$$

$$+ a_yb_x(\vec{j}\cdot\vec{i}) + a_yb_y(\vec{j}\cdot\vec{j}) + a_yb_z(\vec{j}\cdot\vec{k}) + a_zb_x(\vec{k}\cdot\vec{i}) + a_zb_y(\vec{k}\cdot\vec{j}) + a_zb_z(\vec{k}\cdot\vec{k})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Le regole sono:

Essendo i versori fra di loro e con modulo il loro prodotto scalare risulta:

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1}$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

Vale la proprietà distributiva

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$$

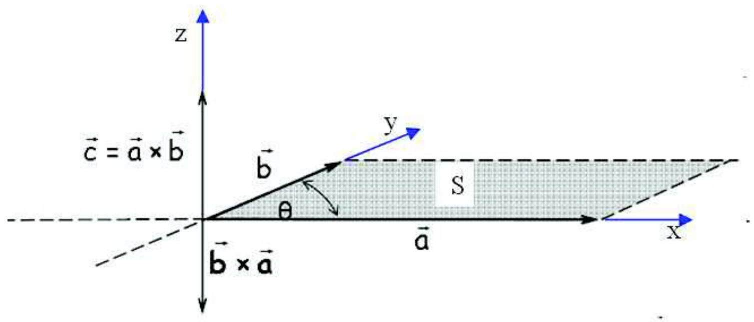
Vale la proprietà commutativa

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

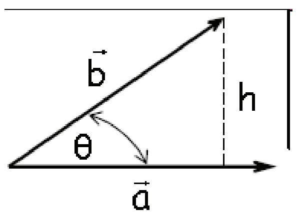
Operazioni vettoriali

b) prodotto Vettoriale $\vec{a}\times\vec{b}$

Si indica con (x), il risultato del prodotto vettoriale tra due vettori, è un altro vettore, con direzione perpendicolare al piano formato da entrambi i due vettori.
Il modulo del vettore risultante e uguale alla superficie *S* del parallelogramma formato dai due vettori.



La superficie *S* di un parallelogramma e il prodotto della base **a** per l'altezza **h**, dove h=bsen θ, è la proiezione di b sulla ortogonale ad a.



$$S = a \times h = |\vec{a}| \times |\vec{b}| sen\theta$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| sen\theta$$

$$\theta = 0° \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$\theta = 90° \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||b|$$

$$\theta = 180° \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

Operazioni vettoriali

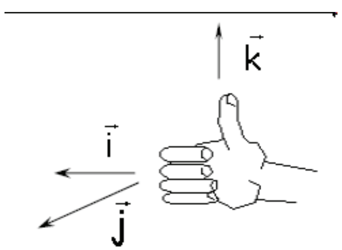
Proprietà del Prodotto Vettoriale

Dati due vettori: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ $\qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

Il prodotto vettoriale è dato da:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$



Le regole sono:

Essendo i versori fra di loro e con modulo il loro prodotto vettoriale risulta:

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{j} \times \vec{j} = 0, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Si ricorda che il sen(0)=sen(180)=0

Vale la proprietà distributiva

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Il prodotto vettoriale è anti-commutativo

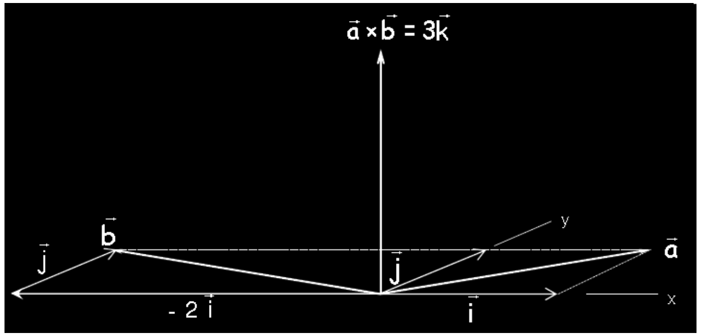
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Operazioni vettoriali

Esercizio sul prodotto Vettoriale $\vec{a}\times\vec{b}$

Dati i vettori: $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$

$\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}$



$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{i}+\vec{j})\times(-2\vec{i}+\vec{j})=(0)\vec{i}+(0)\vec{j}+(1\cdot 1-1\cdot(-2))\vec{k}=3\vec{k}$$

Era facile capire che essendo i due vettori a e b sul piano x,y il vettore prodotto vettoriale aveva solo componenti in z (dalla def. Di prodotto vettoriale)

Allo stesso risultato si poteva giungere utilizzando le matrici.

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)+(a_x b_y-a_y b_x)=$$

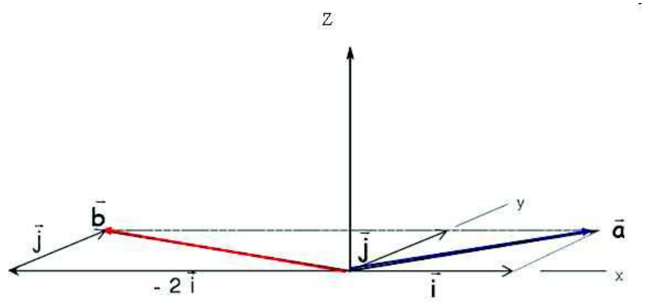
$$=(1\cdot 0-0\cdot 1)\vec{i}+(0\cdot(-2)-1\cdot 0)\vec{j}+(1\cdot 1-1\cdot(-2))\vec{k}=0\vec{i}+0\vec{j}+3\vec{k}=3\vec{k}$$

Operazioni vettoriali

Esercizio sul prodotto Scalare $\vec{a}\cdot\vec{b}$

Dati i vettori: $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$

$\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}$



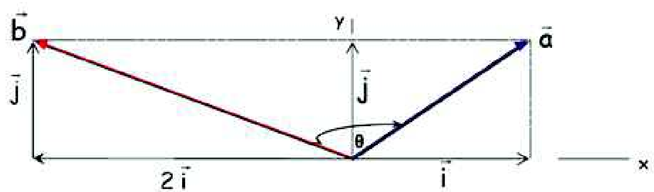
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{i}+\vec{j})\times(-2\vec{i}+\vec{j})=(1\cdot(-2)\vec{i}\cdot\vec{i}+(1\cdot 1)\vec{j}\cdot\vec{j}=-2+1=-1$$

L'angolo compreso si può calcolare facendo ricorso alla definizione di prodotto scalare:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=ab\cos\theta\Rightarrow\theta=\arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}\right)$$

$$=\arccos\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=\arccos\frac{-1}{\sqrt{10}}=108{,}4°$$

$$S=a\times h=|\vec{a}|\times|\vec{b}|sen\theta=\sqrt{10}sen(108{,}4°)=3$$



c.v.d.