

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
2002
Indirizzo Scientifico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica.

Tema 1

L'effetto fotoelettrico rimase per lunghi anni un mistero fino alla scoperta delle sue leggi da parte di Albert Einstein e le attività sperimentali di Robert Andrews Millikan. Nel 1905, Einstein riuscì a fornire un'interpretazione del fenomeno introducendo il concetto di fotone, la cui esistenza fu poi confermata dalla scoperta dell'effetto Compton nel 1923. Einstein, Millikan e Compton ebbero il premio Nobel per la fisica rispettivamente negli anni 1921, 1923 e 1927.

Il candidato:

1. scriva e commenti le leggi fisiche dell'effetto fotoelettrico, descriva il fenomeno e proponga un esempio di applicazione tecnologica;
2. spieghi perché non è stato possibile interpretare l'effetto fotoelettrico utilizzando le caratteristiche di un'onda elettromagnetica;
3. descriva somiglianze e differenze tra il fotone di Einstein e il quanto di energia proposto da Planck nella radiazione del corpo nero;
4. descriva l'effetto Compton e commenti la formula:

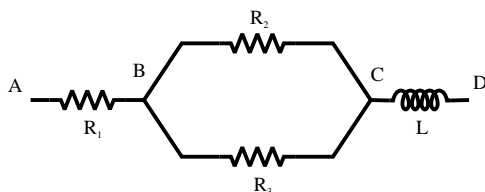
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c} (1 - \cos \theta)$$

che mette in relazione le grandezze fisiche interessate;

5. calcoli l'angolo di diffusione di un fotone che, avendo un'energia iniziale di 0,8 MeV, ne perde un terzo per effetto Compton:
($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s, $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s)

Tema 2

Una parte di un circuito (in figura) è costituita da tre resistori ($R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$, $R_3 = 300 \Omega$) e da un solenoide posto in aria. Questo è lungo 5 cm, ha una sezione circolare di 16 cm^2 ed è formato da 1000 spire di resistenza trascurabile.



All'interno del solenoide si trova un piccolo ago magnetico che, quando non vi è passaggio di corrente, è perpendicolare all'asse del solenoide perché risente soltanto del campo magnetico terrestre ($B_t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$).

Il candidato:

1. esponga le sue conoscenze riguardo al campo magnetico terrestre e all'uso della bussola magnetica;
2. spieghi il concetto di resistenza elettrica, descriva il tipo di collegamento dei tre resistori R_1 , R_2 e R_3 e ne calcoli la resistenza totale;
3. spieghi il concetto di induttanza e calcoli l'induttanza del solenoide, dopo aver dimostrato come si ricava la formula per il suo calcolo;
4. avendo osservato che l'ago magnetico ha subito una deviazione, con un angolo di 30° rispetto alla direzione originaria, calcoli, in μA , l'intensità della corrente che attraversa ognuna delle tre resistenze e il solenoide;
5. nelle stesse condizioni precedenti, calcoli il potenziale elettrico nei punti A, B e C, sapendo che il punto D è collegato a massa;
6. sapendo che tra A e D è mantenuta la differenza di potenziale già calcolata, ricavi l'angolo di deviazione dell'ago magnetico che si ottiene eliminando il resistore R_2 e interrompendo, perciò, quel tratto di circuito.

La soluzione

Tema 1

Le leggi dell'effetto fotoelettrico

Nel redigere le risposte per questo quesito e i seguenti, abbiamo ripreso il testo della discussione delle prove d'esame relative agli anni 1997 e 2000.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Einstein propose un modello, basato sull'ipotesi che la luce abbia natura corpuscolare e sia costituita da particelle che oggi chiamiamo fotoni. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia hf , con f pari alla frequenza della luce incidente. Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore alla *funzione lavoro* W che misura l'energia necessaria ad estrarre un elettrone, e l'elettrone resta confinato nel metallo: qui, negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{hc}{\lambda_0}. \quad (1)$$

L'effetto fotoelettrico è sfruttato in diversi dispositivi, fra cui le *cellule fotoelettriche* impiegate come interruttori sensibili alla luce nei circuiti che regolano l'apertura di cancelli automatici o l'attivazione di sistemi di allarme. Quando la radiazione che illumina il catodo viene intercettata da un oggetto di passaggio, la corrente nel circuito si interrompe. La variazione di corrente può essere utilizzata come segnale che attiva il servomeccanismo di apertura di un cancello.

L'effetto fotoelettrico dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, l'effetto fotoelettrico è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata dalla funzione lavoro W , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della

radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. Per la precisione, la densità di energia elettromagnetica in una zona dello spazio in cui è presente un campo elettrico sinusoidale è direttamente proporzionale al quadrato del valore massimo del campo. In questa relazione non compaiono né la frequenza né la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica in questione.

In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa e quindi in grado di generare un campo elettrico con un valore massimo sufficientemente intenso, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta classicamente inspiegabile.

I quanti di luce secondo Planck e secondo Einstein

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. In quel contesto, Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare *la radiazione stessa* e di considerarla come composta di corpuscoli o *quanti di luce* aventi energia hf . Ogni quanto ha quindi un'energia:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (2)$$

Vale la pena di far notare che il termine *fotone*, che il testo della prova sembra attribuire ad Einstein, è più tardo e non è dovuto a lui.

Schematicamente:

- somiglianze: sia Planck che Einstein superano l'elettromagnetismo classico, riconoscendo che per spiegare un insieme di fatti sperimentali (il comportamento del corpo nero e l'effetto fotoelettrico) è inevitabile introdurre una forma di *quantizzazione* dell'energia;
- differenze: mentre Planck quantizza soltanto gli scambi energetici fra materia e radiazione, lasciando alla radiazione stessa il carattere continuo che le attribuisce l'elettromagnetismo classico, Einstein quantizza la radiazione stessa, proponendo esplicitamente di unificare dal punto di vista corpuscolare la descrizione della materia e della radiazione.

L'effetto Compton

L'effetto Compton è osservabile mediante il seguente apparato sperimentale: una sorgente di raggi X viene usata per irraggiare un bersaglio di grafite; un apposito rivelatore raccoglie i raggi X diffusi al di là del bersaglio e ne misura la lunghezza d'onda. Si osserva che la lunghezza d'onda λ' dei raggi X diffusi è *maggiore* della lunghezza d'onda λ dei raggi incidenti.

Compton propose di spiegare la variazione della lunghezza d'onda considerando l'interazione fra i raggi X e gli elettroni della grafite come un urto elastico

fra un fotone e un elettrone. Scrivendo i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto totali (in forma relativistica, data la presenza del fotone), e risolvendo il sistema di equazioni corrispondente, Compton ottenne l'espressione:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c} (1 - \cos \theta) \quad (3)$$

dove m_0 rappresenta la massa a riposo dell'elettrone, mentre θ è l'angolo di diffusione fra la direzione dei fotoni X incidenti e quella dei fotoni diffusi.

L'ottimo accordo fra i dati sperimentali e l'espressione proposta da Compton convinse definitivamente la comunità dei fisici della validità del modello corpuscolare della luce proposto da Einstein.

Il calcolo dell'angolo di diffusione

L'energia del fotone incidente è:

$$E = 0,8 \text{ MeV} = 0,8 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 1,28 \cdot 10^{-13} \text{ J} \quad (4)$$

mentre l'energia del fotone diffuso è

$$E = \frac{2}{3} 0,8 \text{ MeV} = 0,85 \cdot 10^{-13} \text{ J}. \quad (5)$$

Le corrispondenti lunghezze d'onda sono:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,28 \cdot 10^{-13} \text{ J}} = 1,55 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (6)$$

$$\lambda' = \frac{hc}{E'} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0,85 \cdot 10^{-13} \text{ J}} = 2,33 \cdot 10^{-12} \text{ m}. \quad (7)$$

La variazione di lunghezza d'onda è pertanto:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2,33 \cdot 10^{-12} \text{ m} - 1,55 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0,78 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (8)$$

e dalla (3) otteniamo:

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \left(1 - \frac{m_0 \cdot c \cdot \Delta\lambda}{h} \right) = \\ &= \arccos \left(1 - \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 0,78 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}} \right) = \\ &= 47^\circ. \end{aligned} \quad (9)$$

Tema 2

Il campo magnetico e la bussola

Com'è noto, il pianeta Terra presenta un campo magnetico, la cui presenza può essere messa in evidenza osservando il fatto che un ago magnetizzato, libero di ruotare in un piano orizzontale, si dispone spontaneamente lungo una direzione ben precisa. Il campo magnetico terrestre ha molte proprietà importanti dal punto di vista geofisico e astronomico, ma molte di queste proprietà sono più spesso l'oggetto del corso di Scienze della Terra che del corso di Fisica.

Per quanto ci interessa in questo contesto, diremo che in prima approssimazione le linee del campo magnetico terrestre possono essere considerate analoghe a quelle di un magnete rettilineo disposto come l'asse terrestre. Il polo nord dell'ago di una bussola ha questo nome proprio perché tende a disporsi lungo tali linee in modo da indicare la direzione del Polo Nord terrestre. In base a questo fatto, dobbiamo osservare che il Polo Nord magnetico della Terra è, dal punto di vista magnetico, un polo sud. Va anche ricordato che la posizione dei poli magnetici non coincide esattamente con quella dei poli geografici, e che è soggetta a deriva nel tempo, e a fenomeni, non ancora del tutto spiegati, di inversione brusca di polarità (l'aggettivo "brusca" va inteso, naturalmente, rispetto a una scala geologica dei tempi...).

La resistenza elettrica

Per *resistenza elettrica* di un conduttore si intende quella grandezza fisica che misura la tendenza del conduttore a opporsi al passaggio di una corrente elettrica al proprio interno. Il concetto di resistenza non è univocamente definito se non per quei conduttori, detti *ohmici*, per i quali vale una legge di dipendenza lineare fra la differenza di potenziale imposta ai capi e l'intensità della corrente elettrica che li attraversa. Si tratta della ben nota *prima legge di Ohm*:

$$\Delta V = Ri \tag{10}$$

dove R è appunto la resistenza del conduttore in esame, misurata in ohm.

La resistenza di un conduttore ohmico non è in generale una costante, ma dipende dalla temperatura del conduttore. Un dispositivo progettato in modo tale da fornire ai propri capi una resistenza ben definita entro margini di temperatura (e quindi regimi di corrente) abbastanza ampi è detto un *resistore*. La prima legge di Ohm e le leggi di Kirchhoff, valide in circuiti con componenti lineari, permettono di dimostrare le seguenti affermazioni:

- due o più resistori connessi in modo da essere attraversati dalla stessa corrente (connessi *in serie*) sono equivalenti a un resistore avente come resistenza la somma delle loro resistenze;
- due o più resistori connessi in modo da essere sottoposti alla stessa differenza di potenziale (connessi *in parallelo*) sono equivalenti a un resistore avente come resistenza l'inverso della somma degli inversi delle loro resistenze.

Nel circuito descritto nel testo, il resistore R_1 è connesso in serie alla connessione in parallelo dei resistori R_2 e R_3 . La resistenza totale offerta dai tre resistori è

pertanto:

$$R_T = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = 100 \Omega + \left(\frac{1}{200 \Omega} + \frac{1}{300 \Omega} \right)^{-1} = 220 \Omega. \quad (11)$$

L'induttanza di un solenoide

In un qualunque dispositivo elettrico attraversato da una corrente assegnata, il flusso del campo magnetico concatenato è direttamente proporzionale all'intensità della corrente:

$$\Phi(\vec{B}) = Li \quad (12)$$

dove il coefficiente di proporzionalità L è detto coefficiente di autoinduzione o *induttanza* del dispositivo. Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura dell'induttanza è l'henry (H).

In un solenoide di lunghezza l e sezione S , formato da N spire, attraversato da una corrente di intensità i , si stabilisce un campo magnetico uniforme, parallelo all'asse del solenoide, di intensità:

$$B = \mu_o \frac{Ni}{l}. \quad (13)$$

Le linee di questo campo attraversano perpendicolarmente N volte la sezione del solenoide, generando un flusso:

$$\Phi = BSN = \mu_o \frac{N^2 Si}{l} \quad (14)$$

e richiamando la (12) si ottiene:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \mu_o \frac{N^2 S}{l}. \quad (15)$$

Nel caso in esame l'induttanza del solenoide risulta:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \frac{1000^2 \cdot 16 \text{ cm}^2}{5 \text{ cm}} = 40 \text{ mH}. \quad (16)$$

Il calcolo dell'intensità della corrente

A circuito aperto, l'ago magnetico all'interno del solenoide si orienta lungo la direzione del campo magnetico terrestre \vec{B}_t , perpendicolare all'asse del solenoide. A circuito chiuso e in condizioni di corrente continua, nel solenoide si stabilisce un ulteriore campo magnetico, \vec{B}_s , parallelo all'asse del solenoide. L'ago magnetico si dispone quindi lungo il campo magnetico risultante $\vec{B}_R = \vec{B}_t + \vec{B}_s$.

Dalla trigonometria elementare è immediato ricavare che:

$$B_s = B_t \cdot \tan \alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot \tan(30^\circ) = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ T}. \quad (17)$$

Ricordando la (13) possiamo ricavare l'intensità della corrente necessaria a produrre il campo \vec{B}_s :

$$i = \frac{B_s l}{\mu_o N} = \frac{1,15 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot 5 \text{ cm}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 1000} = 458 \mu\text{A}. \quad (18)$$

La corrente i che attraversa il solenoide dev'essere uguale naturalmente a quella che attraversa il resistore R_1 . Nel parallelo formato da R_2 e R_3 , invece, la corrente si divide in maniera inversamente proporzionale alla resistenza, per cui le due correnti parziali risultano uguali rispettivamente a $275 \mu\text{A}$ e $183 \mu\text{A}$.

Il calcolo del potenziale elettrico

Poiché il punto D è collegato a massa, il suo potenziale è posto convenzionalmente a zero. Dato che la caduta di tensione ai capi dell'induttanza è trascurabile (com'è trascurabile la resistenza dell'induttanza stessa), anche il punto C è a potenziale zero. La differenza di potenziale fra A e C è uguale, per la legge di Ohm, alla resistenza totale R_T per l'intensità della corrente che attraversa i resistori:

$$\Delta V_{AC} = R_T i = 220 \Omega \cdot 458 \mu\text{A} = 101 \text{ mV}. \quad (19)$$

Per quanto già detto sul potenziale di C, il potenziale in A risulta pertanto pari a 101 mV. Infine, sottraendo a questo potenziale la caduta di tensione su R_1 si ottiene il potenziale in B, $101 \text{ mV} - 100 \Omega \cdot 458 \mu\text{A} = 55 \text{ mV}$.

La deflessione dell'ago magnetico nel circuito modificato

Eliminando il resistore R_2 e interrompendo quel tratto di circuito, la resistenza totale del circuito risulta:

$$R'_T = R_1 + R_3 = 100 \Omega + 300 \Omega = 400 \Omega. \quad (20)$$

La nuova intensità di corrente risulta pertanto:

$$i' = \frac{\Delta V_{AD}}{R'_T} = \frac{\Delta V_{AC}}{R'_T} = \frac{101 \text{ mV}}{400 \Omega} = 253 \mu\text{A}. \quad (21)$$

Questa corrente genera nel solenoide un campo magnetico:

$$B'_s = \mu_o \frac{N i'}{l} = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot \frac{1000 \cdot 253 \mu\text{A}}{5 \text{ cm}} = 0,64 \cdot 10^{-5} \text{ T}. \quad (22)$$

Attraverso le stesse considerazioni trigonometriche già invocate si ottiene che il nuovo angolo di deflessione dell'ago magnetico è:

$$\alpha' = \arctan \left(\frac{B'_s}{B_t} \right) = \arctan \left(\frac{0,64 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-5}} \right) = 18^\circ. \quad (23)$$