Infinito, infiniti e paradossi dell'infinito.

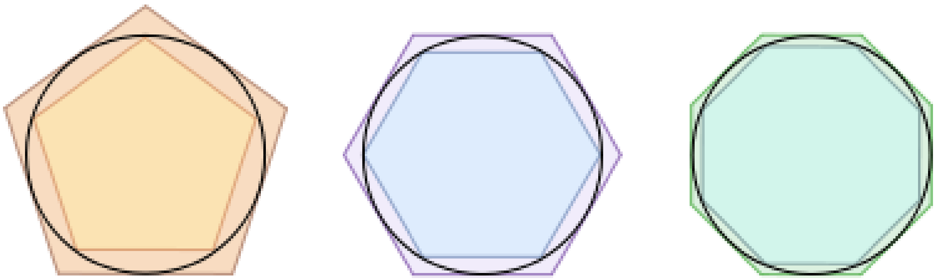
Il termine *Infinito* nella storia del pensiero occidentale ha sempre assunto due significati tra loro opposti: quello di *Infinito matematico-spaziale* e quello di *Infinito reale*. Due realtà nelle quali il significato stesso di "infinito" assume valori diversi. Nel primo esso implica un'essenziale incompiutezza e imperfezione, mentre nell'altro caso si dice di ciò che per la sua perfezione, non manca di nulla e comprende tutto in sé. Nel VII sec. a.c. Anassimandro di Mileto, discepolo di Talete, cercando di dare una spiegazione all'origine dell'universo, trovò il principio (Archè) della realtà tutta, nell'*Apeiron*, termine greco che significa ciò che è privo di limite, "illimitato", "infinito". L'infinito si configura dunque come padre di tutte le cose, e punto da cui hanno avuto origine la realtà e il mondo.
Il principio è stato poi ripreso da altri con accezioni e significati diversi.. "*C'è un concetto che corrompe e altera tutti gli altri. Non parlo del Male, il cui limitato impero è l'Etica; parlo dell'Infinito*", così ha scritto J. L. Borges. Perciò parlare di infinito non è certo facile. Non l'infinità di spazio e tempo nel quale era dolce naufragare per Leopardi, né tantomeno l'infinito dell'Assoluto Divino, sui quali sono stati scritti un'infinità di testi, tanto per restare in tema, ma il senso dell'infinito che si ha in matematica e in geometria. In particolare per la matematica, abituata a trattare entità ben definite, parlare di enti "**in-definiti**" o "**in-determinati**", "**infiniti**" appunto, assume un particolare significato. Se provate però a rispondere alla domanda "Quanti sono i numeri interi?", la risposta verrà quasi inconsciamente e immediatamente associata all'infinito. Una storiella di Cesare Zavattini, famoso sceneggiatore cinematografico, scrittore e poeta italiano, così affronta il problema in un racconto tutto imperniato sull'ironia dal titolo :"Gara di matematica".

E' un ricordo della mia infanzia. Abitavo a Gottinga nel dicembre del milleottocentosettanta. Mio padre ed io giungemmo all'Accademia quando il presidente Maust stava cominciando l'appello dei partecipanti alla Gara Mondiale di Matematica. Subito babbo andò a mettersi fra gli iscritti dopo avermi affidato alla signora Katten, amica di famiglia. Seppi da lei che il colpo del cannone di Pombo, il bidello, avrebbe segnato l'inizio della storica contesa. La signora Katten mi raccontò un episodio, ignoto ai più, intorno all'attività di Pombo. Costui sparava da trent'anni un colpo di cannone per annunciare il mezzogiorno preciso. Una volta se n'era dimenticato. Il dì appresso, allora, aveva sparato il colpo del giorno prima, e così di seguito fino a quel venerdì del milleottocentosettanta, Nessuno a Gottinga si era mai accorto che Pombo sparava il colpo del giorno avanti. "Esauriti i preliminari, la gara ebbe inizio alla presenza del principe Ottone e di un ragguardevole gruppo di intellettuali. "Uno, due, tre, quattro, cinque… Nella sala si udivano soltanto le voci dei gareggianti. "Alle diciassette circa, avevano superato il ventesimo migliaio. Il pubblico si appassionava alla nobile contesa e i commenti si intrecciavano. Alle diciannove, Alain, della Sorbona, si accasciò sfinito. "Alle venti, i superstiti erano sette. "36767, 36768, 36769, 36770…" "Alle ventuno Pombo accese i lampioni. Gli spettatori ne approfittarono per mangiare le provviste portate da casa. "40719, 40720, 40721…" "Io guardavo mio padre, madido di sudore, ma tenace. La signora Katten accarezzandomi i capelli ripeteva come un ritornello: 'Che bravo babbo hai,' e a me non pareva neppure di avere fame. Alle ventidue precise avvenne il primo colpo di scena: l'algebrista Pull scattò: "Un miliardo". "Un oh di meraviglia coronò l'inattesa sortita; si restò tutti col fiato sospeso. "Binacchi , un italiano, aggiunse issofatto: "'Un miliardo di miliardi di miliardi.' Nella sala scoppiò un applauso subito represso dal Presidente. Mio padre guardò intorno con superiorità, sorrise alla signora Katten e cominciò: "'Un miliardo di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi…' "La folla delirava: 'Evviva, evviva. '"La signora Katten e io, stretti uno all'altro, piangevamo dall'emozione. "…di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi.' "Il presidente Maust, pallidissimo, mormorava a mio padre, tirandolo per le falde della palandrana: 'Basta, basta, le farà male.' Mio padre seguitava fieramente: "… di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi.' A poco a poco la sua voce si smorzò, l'ultimo fievole di miliardi gli uscì dalle labbra come un sospiro, indi si abbattè *sfinito sulla sedia. Gli spettatori in piedi lo acclamavano freneticamente. Il principe Ottone gli si avvicinò e stava per appuntargli una medaglia sul petto quando Gianni Binacchi urlò: "'Più uno!' "La folla precipitatasi nell'emiciclo portò in trionfo Gianni Binacchi. Quando tornammo a casa, mia madre ci aspettava ansiosa alla porta. Pioveva. Il babbo, appena sceso dalla diligenza, le si gettò tra le braccia singhiozzando: 'Se avessi detto più due avrei vinto io.'" (Cesare Zavattini* - I tre libri, Parliamo tanto di me - *Bompiani - cap. XVI pag. 48,49,50)*

Come si può notare il concetto di infinito è associato al numero, cioè al processo del contare. E infatti dato un numero se ne può pensare uno più grande, così come si può prolungare una retta aggiungendo punti ai suoi estremi. Allo stesso modo si può parlare di infinitesimi dividendo un segmento in parti più piccole, in un procedimento senza fine.

L'infinito è, dunque, ciò che non ha una fine raggiungibile, ciò che non è determinato e, come tale, non ha un'esistenza positiva e, comunque, resta qualcosa di inconoscibile.

Aristotele (384-322 a.c.) nega che l'infinito possa mai esistere come una sostanza o un attributo di essa, come una realtà in atto, e gli riconosce solo un'esistenza potenziale. L'infinito, infatti, è ciò che può venire sia diviso sia accresciuto illimitatamente. Di conseguenza, l'infinito non è un ente reale, in atto, ma solo un processo potenzialmente inesauribile. Aristotele parlava a questo riguardo di "Infinito potenziale", rifiutandosi di accettare l'idea dell"infinito attuale", della totalità intesa come singola entità, inaccessibile alla mente umana. L'"infinito potenziale" è una sorta di scappatoia che ci libera da ogni problema; quando ne abbiamo bisogno possiamo aumentare quel che ci serve: un numero, un'area, un volume, senza limiti. Lo utilizzò ad esempio Archimede (287-212 a.c.) con il metodo di "**esaustione**" inventato da tale Eudosso da Cnido (408-355 a.c.). Come calcolare l'area del cerchio? Si costruiscono due poligoni regolari uno circoscritto ed uno inscritto alla circonferenza. L'area del poligono circoscritto è maggiore di quella del cerchio, mentre l'area del poligono inscritto è inferiore ad essa. Aumentando il numero dei lati le due aree tenderanno sempre più ad avvicinarsi a quella del cerchio.



Questo metodo permise ad Archimede di predire che il valore di Pigreco doveva essere compreso fra 3 + 10/71 e 3 + 1/7.

La figura di Pitagora è universalmente nota, così come la sua scuola pitagorica nata intorno al 530 a.C. I Pitagorici fondavano la stessa esistenza del mondo visibile sul numero. La loro filosofia era basata sull'idea di infinito potenziale. Tutto era riconducibile ai numeri, anche il senso del bello e del brutto. Essi rifuggivano dall'idea di infinito: per loro un segmento, una parte di retta limitata da due suoi estremi, non poteva contenere un insieme infinito di punti, perché altrimenti avrebbe dovuto avere lunghezza infinita visto che la somma di infiniti termini, secondo le sue idee, non può che dare un risultato infinito. Quindi ogni segmento doveva essere espresso con un numero finito **n** di parti puntuali Q. (una sorta di quanti spaziali unidimensionali), così come un altro segmento diverso doveva essere espresso da un numero finito m di parti puntuali Q. Esisteva sempre quindi un rapporto razionale tra due diversi segmenti che si esprimeva come frazione n/m. Era questo uno dei dogmi del pitagorismo secondo cui l'essenza di tutte le cose, sia in geometria, sia nelle questioni pratiche e teoriche della vita umana era spiegabile in termini di arithmos (da cui aritmetica), cioè di proprietà intrinseche dei numeri interi e dei loro rapporti.

••••••••••••• L = n*Q ••••••••••••••••••• L’ = m*Q

L/L’ = n/m

Ma un giorno Ippaso da Metaponto, uno dei seguaci più solerti della setta dei pitagorici, proprio applicando quello che è universalmente conosciuto come “teorema di Pitagora”, fece una scoperta sconvolgente. La diagonale D di un quadrato di lato L può calcolarsi applicando il teorema suddetto scrivendo:

$$D^2 = 2\,L^2$$

Ma D e L, in base a quanto abbiamo detto in precedenza, sono esprimibili come multipli interi n e m di una stessa quantità Q, qualunque sia la loro misura, per cui abbiamo

$$(n*Q)^2 = 2(m*Q)^2 \quad \text{Cioè} \quad n*n = 2*m*m$$

Questo, per Ippaso portava ad una incongruenza dato che n e m sono interi. Se n è dispari infatti, lo sarà anche il suo quadrato (3^2=9, 5^2=25 ecc.) per cui avremo che un numero dispari è uguale ad un numero pari (2 volte qualsiasi numero è pari). Si può ancora dimostrare che anche se n è pari si arriva a soluzioni assurde. Dov’è l’inghippo? Secondo Ippaso l’errore sta nel considerare i due segmenti commensurabili, cioè il loro rapporto non può essere espresso come frazione di interi. Oggi sappiamo infatti che la radice di 2 (√2) è un numero irrazionale espresso da un numero con infinite cifre dopo la virgola

1,414213562……..

Tutto il castello di carta delle certezze pitagoriche venne improvvisamente a mancare; la notizia venne mantenuta segreta per non distruggere dalle fondamenta la setta stessa e il povero Ippaso scacciato e perseguitato.

Uno dei più noti ragionamenti che spingevano a respingere l’idea di un infinito attuale, cioè realizzato, fu senz’altro quello prospettato dal filosofo Zenone (495-430 a.c.).

Secondo Zenone una freccia scoccata da un arciere non raggiungerà mai il bersaglio, e non si muoverà nemmeno. Per colpire il bersaglio la freccia dovrà percorrere prima metà percorso, ma per arrivare a metà percorso dovrà volare prima per 1/4 del percorso, la metà della metà, e prima ancora dovrà percorrere 1/8 del percorso, e così via.. Poiché il processo di suddivisione può continuare all’infinito, ogni singolo passetto della freccia sarà nullo. Se ogni singolo passetto fosse diverso da zero la loro somma di termini infiniti dovrebbe risultare infinita, il che sarebbe assurdo. La conclusione secondo Zenone è che il movimento della freccia è puramente illusorio. Il paradosso è stato trasferito alla corsa fra Achille e la tartaruga, e porta alla stessa conclusione. Nella leggendaria sfida di Achille e la tartaruga, questa seconda, partendo in anticipo, non verrà mai raggiunta in quanto Achille sarà impegnato a percorrere sempre la distanza che lo separa dalla posizione precedente della tartaruga mentre questa nel frattempo si sarà spostata in avanti. Dovremo arrivare al diciottesimo secolo per arrivare a scoprire che una somma di infiniti termini può risultare finita. Altri problemi logici che l’uso dell’infinito ci costringe ad affrontare risalgono a Galileo. Egli si chiedeva quanti fossero i quadrati dei numeri interi. La sua risposta fu che erano infiniti quanto i numeri stessi. Si possono infatti mettere in corrispondenza biunivoca, uno a uno per capirci, i numeri interi ed i loro quadrati secondo la corrispondenza sotto riportata.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…..
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	…..

Così Galileo nei suoi discorsi sui massimi sistemi affronta la questione in un
Il brano tratto da “Dialoghi delle nuove
Scienze” (v. ad es. "Opere", Ed. Rizzoli, 1938, Vol.II, p.115 e segg.).

Salviati — ...L'infinito é per sé solo incomprensibile, come anco gl'indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea dei punti indivisibili, bisogna farli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile[...]. Tra le prime istanze che si sogliono produrre contro a quelli che compongono il continuo d'indivisibili, suol essere quella che uno indivisibile aggiunto a un altro indivisibile non produce cosa divisibile, perché se ciò fusse, ne seguiterebbe che anco l'indivisibile fusse divisibile; perché quando due indivisibili, come per esempio, due punti, congiunti facessero una quantità, qual sarebbe una linea divisibile, molto più sarebbe tale una composta di tre, di cinque, di sette e di altre moltitudini dispari; le quali linee essendo poi segabili in due parti eguali, rendon segabile quell'indivisibile che nel mezzo era collocato. In questa ed altre obiezioni di questo genere si dà soddisfazione alla parte col dirgli, che non solamente due indivisibili, ma né dieci, né cento, né mille non compongono una grandezza divisibile e quanta (2), ma sì bene infiniti.

Simplicio — Qui nasce subito il dubbio, che mi pare insolubile: ed é , che essendo noi sicuri trovarsi linee una maggiore dell'altra, tutta volta che amendue contenghino punti infiniti, bisogna confessare trovarsi nel medesimo genere una cosa maggior dell'infinito, perché la infinità de i punti della linea maggiore eccederà la infinità de i punti della minore. Ora questo darsi un infinito maggior dell'infinito mi par concetto da non poter esser capito in verun modo.

Salviati — Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito attorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed eguaglità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro [...]. Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati e quali i non quadrati.

Simplicio — So benissimo che il numero quadrato é quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in se medesimo: e così il quattro, il nove, etc., son numeri quadrati, nascendo quello dal due, e questo dal tre, in se medesimi moltiplicati.

Salviati — Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioé quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi; che non nascono da numeri multiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissime: non é così?

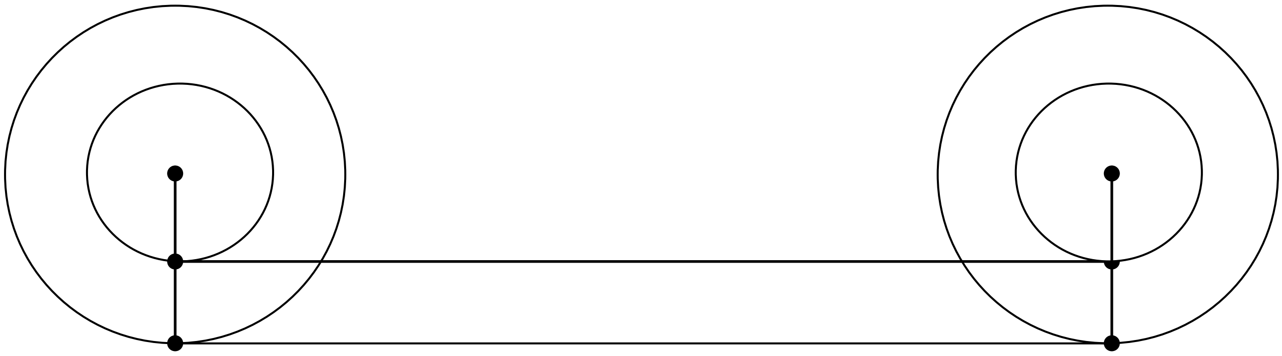
Simplicio — Non si può dir altrimenti.

Salviati — Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, (3), poiché non vi é numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri; e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che é quanto a dire la decima parte esser quadrati, in diecimila solo la centesima parte son quadrati, in un milione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo; bisognerebbe dire, tanti esser i quadrati quanti tutti i numeri insieme.

Sagredo — Che dunque si ha da determinare in questa occasione?

Salviati — Io non veggo a che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine dé quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gli infiniti, ma solo nelle quantità terminate. E però quando il Sig. Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere che

nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti: o veramente se io gli rispondessi, i punti nell'una esser quanti sono i numeri quadrati, in un'altra maggiore quanti tutti i numeri, in quella piccolina quanti sono i numeri cubi, non potrei io avergli dato soddisfazione col porne più in una che nell'altra, e pure in ciascheduna infiniti? E questo é quanto alla prima difficoltà.
Sagredo — Fermate, in grazia, e concedetemi che io aggiunga al detto sin qui un pensiero, che pur ora mi giugne: e questo é, che, stanti le cose dette sin qui, parmi che non solamente non si possa dire, un infinito esser maggiore d'un altro infinito, ma né anco che é sia maggiore d'un finito, perché se 'l numero infinito fusse maggiore, v.g. del millione, ne seguirebbe, che passando dal millione ad altri e ad altri continuamente maggiori, si camminasse verso l'infinito; il che non é: anzi, per l'opposito, a quanto maggiori numeri facciamo passaggio, tanto più ci discostiamo dal numero infinito; perché ne i numeri, quanto più si pigliano grandi, sempre più e più rari sono i numeri quadrati in essi contenuti; ma nel numero infinito i quadrati non possono esser manco che tutti i numeri, come pur ora si è concluso; adunque l'andar verso numeri sempre maggiori e maggiori é un discostarsi dal numero infinito.
Salviati — E così dal vostro ingegnoso discorso si conclude, gli attributi di maggiore o minore o eguale non aver luogo non solamente tra gl'infiniti, ma né anco tra gl'infiniti e i finiti. Passo ora ad un'altra considerazione, ed é, che stante che la linea ed ogni continuo sian divisibili in sempre divisibili, non veggo come si possa sfuggire, la composizione esssere di infiniti indivisibili, perché una divisione e subdivisione che si possa proseguir perpetuamente, suppone che le parti siano infinite, perché altramente la subdivisione sarebbe teminabile; e l'esser le parti infinite si tira in conseguenza l'esser non quante, perché quanti infiniti fanno un'estensione infinita: e così abbiamo il continuo composto d'infiniti indivisibili.
Gravi problemi logici, come si può vedere, irrisolti all'epoca.
Ma c'era un'altra questione analizzata da Galileo. Osservate la figura seguente.



Se si considerano i punti di contatto di due ruote concentriche sui bordi di entrambe, dopo un giro intero avremo che i punti di contatto devono essere gli stessi (in ogni istante ne avrò due corrispondenti); ma le circonferenze sono diverse, quindi si arriva alla conclusione assurda che due segmenti diversi sono costituiti dallo stesso numero di punti. Un paradosso che cozzava contro ogni logica. Galileo risolse il problema facendo finta di nulla. Eppure i quadrati sono meno dei numeri interi, essendo una parte di essi. Si arriva alla conclusione che **il tutto** contiene gli stessi elementi di una sua **parte**. Una pura eresia per i filosofi classici, per i quali una **parte** deve sempre essere inferiore al **tutto**. Allo stesso modo si può dimostrare che i numeri pari o i numeri dispari sono infiniti, e anche i numeri primi, come ebbe a dimostrare Eulero (1707-1783), ecc..ecc...

Proviamo a guardare un altro aspetto, considerando le cosiddette serie numeriche, cioè la somma di infiniti termini costruiti secondo un procedimento iterativo. Ad esempio la serie che segue che si costruisce assegnando ad n successivamente tutti i possibili valori interi positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots..$$

Posiamo a dimostrare che essa è convergente, cioè il suo risultato è finito. (Ricordo che esistono serie divergenti nelle quali il risultato della somma è infinito). Indichiamo con **S** il risultato di tale somma, ammettendo che esista e sia finita, allora possiamo scrivere:

S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + …= 1/2 + (1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + …..)

abbiamo semplicemente utilizzato delle parentesi, quindi rimane tutto inalterato. Mettiamo adesso in evidenza 1/2 tra tutti gli elementi racchiusi dentro parentesi e vediamo che resta, dentro parentesi, la serie iniziale.

S = 1/2 + 1/2 *(1/2 +1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + …..) = 1/2 + 1/2 ***S**

La soluzione di questa semplice equazione di primo grado ci fornisce S = 1, con buona pace di Zenone.

Proviamo ad applicare lo stesso metodo alla serie, piuttosto strana per la verità,

S = 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-….

Riscriviamo la stessa serie raccogliendo:

S = 1- (1-1+1-1+1-1+1-1+1-1…….) = 1 – S

Anche questa è facilmente risolvibile e fornisce come soluzione S = 1/ 2. e questo risultato farebbe già storcere il naso, perché prendendo i termini a coppie avremmo una somma di zeri:

S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)…….+(1-1)..

E non basta. Se raggruppiamo i numeri in modo diverso ad esempio prendendo due termini di posto dispari e uno di posto pari cioè 1 3 2 5 7 4 9 11 6….otteniamo

S = (1+1-1)+(1+1-1)+(1+1-1)+(1+1-1)+….= 1+1+1+1+1+1+1…

Il risultato di tale somma è infinito. Allo stesso modo posso ottenere un qualunque risultato; prendendo ad esempio i termini nelle posizioni 1 3 5 2 7 4 9 6 11 8 13 10 15 12 17 la somma diventa

S = 1+1+1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+….= 3+0+0+0+0+0+0…..

Paradossi dell'infinito, risolti assumendo criteri che impediscono di invertire i termini di una serie, in particolare in presenza di termini negativi. (Per inciso, la serie scritta è indeterminata).

Il racconto che segue, scritto da Agota Kristof, una scrittrice ungherese vissuta in Svizzera fino alla sua morte avvenuta circa un anno fa, mi permette di introdurre un altro paradosso.

Lo scrittore

Mi sono ritirato per scrivere il capolavoro della mia vita. Sono un grande scrittore. Ancora non lo sa nessuno, perché ancora non ho scritto nulla. Ma quando lo scriverò, il mio libro, il mio romanzo….

Per questo ho lasciato l'incarico di funzionario e….cos'altro? Nient'altro. Perché amici non ne ho mai avuti, e amiche ancora meno. Tuttavia mi sono ritirato dal mondo per scrivere un grande romanzo.

Il problema è che non so quale sarà l'argomento. Si è già scritto talmente tanto su tutto e qualunque cosa. Intuisco, sento di essere un grande scrittore, ma nessun argomento mi sembra abbastanza buono, vasto, interessante per il mio talento.

Quindi aspetto. E, chiaramente, nell’attesa soffro la solitudine, e anche la fame, ogni tanto, ma è proprio attraverso questa sofferenza che spero di accedere a uno stato d’animo che mi porti a scoprire un argomento degno del mio talento.

L’argomento purtroppo tarda a manifestarsi, e la mia solitudine diventa sempre più pesante e molesta, il silenzio mi avvolge, il vuoto si insedia ovunque, eppure casa mia non è molto grande.

Ma queste tre cose orribili, solitudine, silenzio e vuoto mi bucano il tetto, esplodono fino alle stelle, si estendono all’infinito, e non so più se sia la pioggia o la nebbia, se siano il föhn o i monsoni.

E grido: Scriverò tutti, tutto quello che si può scrivere.

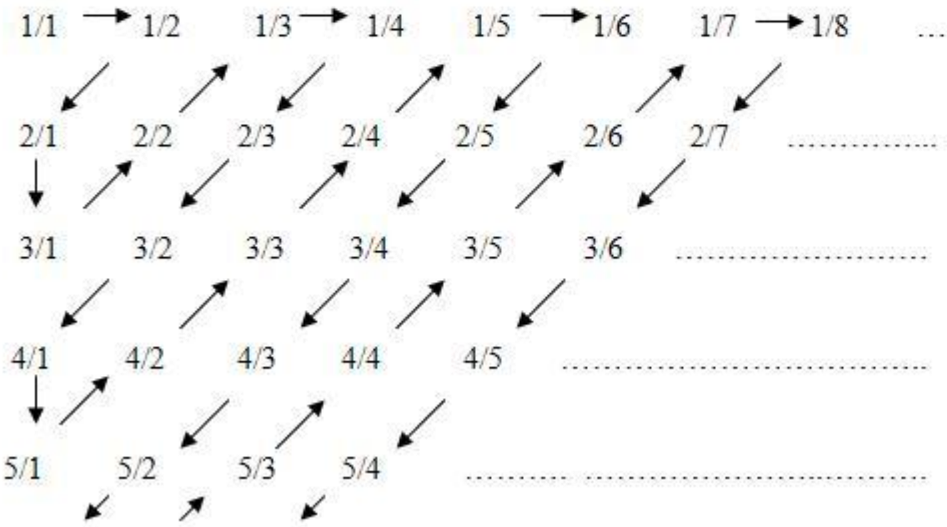
E una voce, ironica ma pur sempre una voce, mi risponde:

- D’accordo, ragazzo. Tutto, ma nient’altro, intesi?

E qui sta il fatto: ci si domanda se è possibile scrivere veramente tutto. Un famoso paradosso, letterario questa volta, viene attribuito allo scrittore Laurence Sterne (1713-1768). Oltre a diverse innovazioni letterarie di carattere provocatorio nella sua “**Vita e opinioni di Tristram Shandy, gentiluomo”**, lo scrittore voleva scrivere la biografia del gentiluomo appena nominato, scrivendo proprio tutto quello che era accaduto. Il romanzo descrive dettagliatamente tutti gli avvenimenti della vita di Shandy a cominciare dal suo concepimento, e dopo molti capitoli, costati anni di lavoro, descrive solo i primi due giorni di vita del protagonista. E’ evidente che in una vita comune e mortale l’autore a quel ritmo non sarebbe mai riuscito a completare il romanzo. Ma se si potesse supporre una vita infinita? Allora le cose sarebbero diverse e lo scrittore potrebbe scrivere tutta la biografia. Come sarebbe possibile? In realtà in questo esempio non stiamo facendo altro che giocare con il principio di corrispondenza biunivoca di cui abbiamo parlato. Ogni successione numerica infinita può essere posta in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali. Così i giorni di scrittura possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i giorni di vita, anche se ne sono solo una parte, perché l’infinito diventa “**ciò che può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte**”. Questa definizione introdotta da Dedekind (1831-1916) risolve il primo paradosso scoperto da Galileo, visto che i quadrati perfetti possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, ed hanno la stessa cardinalità. Georg Cantor (1845-1918) ha continuato a lavorare in maniera sistematica con gli infiniti, scoprendo, come vedremo, che esistono infiniti infiniti di “cardinalità” diversa. In realtà per non creare problemi di tipo religioso Cantor ha chiamato i suoi infiniti: “transfiniti”. L’infinito diventa attuale, cioè insito nell’idea stessa di numero.

Tutti gli infiniti che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali sono stati definiti da Cantor di “cardinalità” $_0$ (Aleph con zero. Aleph è la prima lettera dell’alfabeto ebraico). Abbiamo già detto che questo si verifica per i numeri pari, i dispari, i quadrati, i numeri primi e quanti altri esempi vogliamo. Questi sono tutti insiemi “**numerabili**”. Abbiamo introdotto così anche il concetto di “**insieme**”, inteso intuitivamente come collezione di oggetti con caratteristiche comuni.

E le frazioni? Cioè i numeri razionali sono tanti quanto i numeri naturali? Certo rispose Cantor, basta disporre le frazioni in righe e colonne, di numero infinito, mettendo ad ogni rigo le frazioni con numeratore corrispondente al suo numero naturale, ed in ogni colonna le frazioni con denominatore corrispondente ad ogni numero naturale. Si ha allora:



E così è stabilita una corrispondenza fra le frazioni e i numeri naturali derivanti dal conteggio, quindi la “cardinalità” o “potenza” è la stessa. Cantor escogitò anche una algebra dei “transfiniti”, per cui si può scrivere:

$$\aleph_0 = 1 + \aleph_0 \quad ; \quad \aleph_0 = N + \aleph_0 \quad ; \quad \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$$

e ancora

$$\aleph_0 = \aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0^{2} \quad ; \quad \aleph_0 = \aleph_0^{N}$$

Le formule appena scritte affermano semplicemente che sommando 1 ad infinito, il risultato è sempre infinito; sommando N ad infinito si ha infinito; ma anche sommando infinito ad infinito. La meraviglia nasce quando si fa il prodotto di due infiniti. Possiamo, però, ragionare come per le frazioni ponendo in righe e colonne semplicemente i numeri naturali ed individuando ogni elemento del prodotto con gli indici riga*colonna. Procedendo a zig zag come per le frazioni si trova la corrispondenza biunivoca fra il risultato del prodotto ed i numeri naturali.

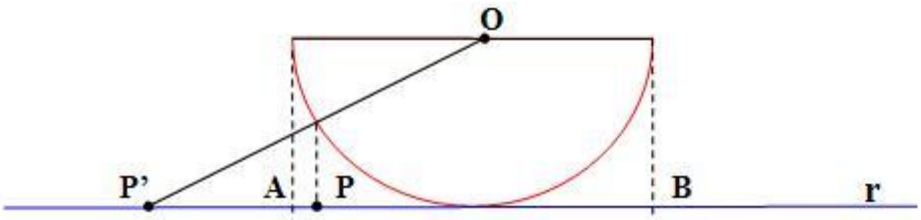
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	.....
(1)	1*1	1*2	1*3	1*4	1*5	1*6	1*7	1*8… …
(2)	2*1	2*2	2*3	2*4	2*5	2*6	2*7	……
(3)	3*1	3*2	3*3	3*4	3*5	3*6	……	……
(4)	4*1	4*2	4*3	4*4	4*5	……	……	……
(5)	5*1	5*2	5*3	5*4	……	……	……	……
(6)	6*1	6*2	6*3	……	……	……	……	……
(7)	7*1	7*2	…..	…..	…..			

Al famoso matematico Hilbert (1862-1943) si deve un altro paradosso associato all’infinito che va sotto il nome di “Albergo di Hilbert”. In un albergo normale con un numero di stanze finito, tutte occupate, è impossibile ospitare un eventuale ospite ulteriore. Ma se l'albergo ha un numero di stanze infinito allora possiamo fare una semplice operazione di spostamento, mettendo gli ospiti ognuno nella stanza successiva, liberando così la prima. E anche se dovessimo trovare posto ad un infinito numero di nuovi avventori, potremmo tranquillamente spostare tutti i presenti nelle stanze dispari, liberando tutte le pari, risolvendo il problema.

Cantor volle fare ancora un passo in avanti. Cosa possiamo dire dei numeri reali, cioè dei numeri decimali, sia quelli razionali che quelli irrazionali? In particolare cerchiamo la risposta alla domanda: "Quanti sono i numeri decimali, ad esempio quelli compresi fra 0 e 1?". Cantor rispose con una dimostrazione per assurdo universalmente conosciuto come "metodo diagonale di Cantor". Il suo ragionamento fu il seguente. Supponiamo di essere in grado di scrivere tutti i numeri decimali compresi fra 0 e 1; essi saranno della forma 0,154367823739…. Con un numero finito o infinito di cifre (questo non ha importanza perché anche se le cifre dopo la virgola sono finite possiamo aggiungere tutti gli 0 che vogliamo, anche infiniti 0). Li possiamo scrivere disponendoli uno per rigo, in corrispondenza biunivoca con i numeri interi, ipotizzando così che siano numerabili.

1 - 0,66342528173635328282650024…..
2 - 0,12453339286547121930000000…..
3 - 0,23861432574947358816354379…..
4 - 0,0002664417728355383883800…..
5 – 0,23459726245353272767353723…..
6 – 0,11526283365437893663738328…..
…………………………………………..

Consideriamo adesso il numero costruito prendendo le prima cifra dopo la virgola dal primo numero, la seconda dopo la virgola dal secondo numero, la terza dal terzo numero e così via, tutti gli elementi della diagonale insomma, aumentati tutti, per esempio di 1, ponendo 0 quando essa è 9. Ebbene questo nuovo numero, 0,739103……o altri costruiti aggiungendo 2 o 3 o la cifra che vogliamo, non è compresa nell'elenco fatto. Esso differisce dal primo numero per la prima cifra dopo la virgola, dal secondo numero per la seconda cifra dopo la virgola, dal terzo per la terza cifra e così via. La conclusione è che non è possibile scrivere tutti i numeri compresi fra 0 e 1, e quindi sono "non numerabili". Essi hanno una "cardinalità" maggiore di $_0$ e vennero associati da Cantor al "continuo", indicato con **C**. I punti appartenenti ad una retta sono di questo tipo. Troviamo di nuovo una infinità di elementi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con una sua parte. Per dimostrarlo prendiamo un segmento di lunghezza **AB**, appartenente ad una retta **r**. Possiamo ora disegnare un semicerchio di diametro AB, come nella figura seguente. Tracciando un qualunque raggio uscente dal centro **O**, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli infiniti punti **P** del segmento **AB,** ottenuti proiettando l'intersezione del raggio con la semicirconferenza su **r,** e gli infiniti punti **P'** della retta tracciata dal centro O e passante per P, come volevasi dimostrare.



La conclusione di quanto appena dimostrato è che qualunque segmento, di qualunque lunghezza (ad esempio pari alla lunghezza del semicerchio) contiene la stessa infinità di punti. Così anche il secondo problema sollevato da Galileo è risolto (due circonferenze diverse costituite dagli stessi punti).
Ma Cantor volle stupire ancora di più considerando un insieme di elementi di lunghezza **nulla** che contenesse elementi della stessa "cardinalità" del continuo. Questo insieme detto appunto "insieme di Cantor" è un sottoinsieme di un segmento costruito con un metodo iterativo di tipo frattale. Dato un segmento di lunghezza unitaria, dividiamolo per 3 e togliamo da esso la terza parte centrale, lasciando gli estremi di ogni segmento.

Resteranno due segmenti di lunghezza 1/3 agli estremi. A questi due segmenti tolgo ancora la terza parte centrale, e così via ripetendo lo stesso procedimento per tutti i segmenti rimanenti che saranno di lunghezza sempre più piccola. Ripetendo all'infinito questo procedimento avremo una serie di punti, e numeri naturalmente, costituiti dagli estremi dei vari segmenti rimanenti; ogni volta che tolgo il terzo centrale questi rimangono.

Quale sarà la misura **x** complessiva dei numeri rimanenti? La riposta è stupefacente :"Zero!" Si può calcolarla facendo la differenza fra la lunghezza del segmento iniziale, **1**, e tutti i vari segmenti che si vanno sottraendo. Scriviamo allora, ricordando che la prima volta togliamo un terzo, poi due volte un terzo di un terzo e poi quattro volte un terzo di un terzo di un terzo e così via:

$$x = 1 - 1/3 - 2 * (1/9) - 4 * (1/27) - 8 * (1/81)\ldots\ldots$$

Con semplici passaggi, e ricordando il risultato di una nota serie matematica, si ha:

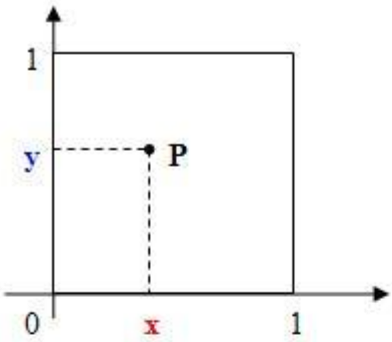
$$x = 1 - \frac{1}{3} * \left[1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \ldots\ldots\right] = 1 - \frac{1}{3} * \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \ldots\right] =$$

$$x = 1 - \frac{1}{3} * \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} * \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 1 - \frac{1}{3} * 3 = 1 - 1 = 0$$

Il nostro insieme allora ha lunghezza 0, e quanti punti contiene? (gli estremi di ogni segmento asportato). Con un geniale ragionamento, rappresentando i numeri in base 3, invece che in base 10, Cantor dimostrò, contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, che i numeri di tale insieme costituivano una infinità non numerabile, della stessa potenza del continuo. Basta osservare che in base 3 i numeri decimali si scrivono nella forma $0{,}abcd.._3$.(Per trasformare tale numero nella usuale base decimale, bisogna fare la operazione $\mathbf{a*3^{-1}+b*3^{-2}+c*3^{-3}\ldots}$ con a, b, c ecc. che possono assumere solo valore **0**, **1** o **2**). Ora i numeri compresi fra 1 e 1/3 sono del tipo $0{,}0.._3$, quelli compresi fra 1/3 e 2/3 sono del tipo $0{,}1.._3$. e quelli compresi fra 2/3 e 1 sono del tipo $0{,}2.._3$. Allo stesso modo si può vedere che i numeri compresi fra 0 e 1/9 sono del tipo $0{,}00.._3$, quelli fra 1/9 e 2/9 sono del tipo $0{,}01.._3$. e quelli compresi fra 2/9 e 3/9=1/3 sono del tipo $0{,}02.._3$. I numeri compresi fra 1/3 e 4/9 sono del tipo $0,10.._3$, quelli compresi fra 4/9 e 5/9 sono del tipo $0,11.._3$ e quelli compresi fra 5/9 e 6/9=2/3 sono del tipo $0,12.._3$. E così via. Se si osserva attentamente, le parti centrali di ogni segmento rimanente contengono degli 1, come cifra dopo la virgola, mentre le parti estreme contengono solo degli 0 e 2. Nel costruire il nostro sottoinsieme, però noi togliamo sempre la parte centrale, quindi vanno eliminati tutti i termini con degli 1 dopo la virgola. (C'è solo una piccola precisazione da fare: la frazione 1/3 in base 3 corrisponde a $0,1_3$, così come 1/9 corrisponde a $0,01_3$, ad esempio. Ma questi numeri si possono anche scrivere rispettivamente $0,0222222\ldots_3$ e $0,0022222\ldots_3$ con infiniti 2, una concessione che Cantor si permise, ma non so con quanta opportunità). Gli elementi che costituiscono l'insieme di Cantor sono quindi termini del tipo 0,020222022… ed essi hanno la stessa potenza del continuo, cioè la stessa "cardinalità"; infatti cambiando tutti i 2 con 1 otteniamo tutti i possibili numeri compresi fra 0 e 1, espressi in base 2. Un insieme di elementi della stessa potenza del continuo, la cui somma è 0. Un risultato veramente sconcertante, paradossale, appunto.

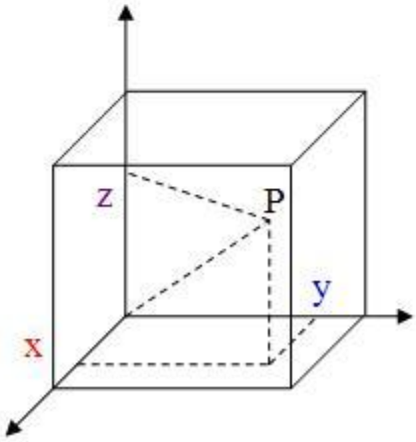
Egli passò poi ad analizzare la "cardinalità" dello spazio bidimensionale. Prendiamo un quadrato di lato 1. E' evidente che su ogni segmento compreso fra 0 e 1 costituente il lato avremo un numero di punti con la "cardinalità" del continuo, come appena visto. Ogni punto del quadrato sarà individuato dalle sue coordinate. Ad esempio il punto caratterizzato da una ascissa **x = 0,4367514321**.. ed una ordinata **y = 0, 7672432127**…. Possiamo allora associare a tale punto P il numero ottenuto prendendo le cifre decimali di x e y e alternandole, cioè:

P = 0, 47366772541342312217…….



Cantor faceva notare che questa rappresentazione apparteneva al continuo, per cui ne concludeva che la "cardinalità" di **C** * **C** = $\mathbf{C}^2$, era la stessa di **C**. Possiamo utilizzare lo stesso metodo per dimostrare che la "cardinalità" dello spazio è la stessa del continuo, immaginando un cubo di lato 1 e individuando i punti al suo interno con le tre coordinate **x**, **y** e **z**. Ogni punto P sarà allora individuato da un numero ottenuto prendendo le cifre dopo la virgola di **x** , **y** e **z** e alternandole a 3 a 3. Se infatti abbiamo **x = 0,8245386…**, **y = 0,4539264…** e **z = 0, 2371643…**, allora:

P = 0, **842253437591326864………**



Utilizzando l'aritmetica dei "transfiniti" possiamo allora scrivere relazioni paradossali quali:

$$C + \;{}_0 = C \;\; ; \;\; C + \quad = C \;\; ; \;\; C = C^2 = C^3 = C^N$$

Risultati veramente stupefacenti. Lo stesso Cantor ne rimase sorpreso, tanto da affermare in una corrispondenza : **"*Lo vedo ma non ci credo!*"**.

A questo punto forse è necessario fare una precisazione, per non disorientare chi legge. Gli studenti conoscono il teorema di Rouchè-Capelli che permette di individuare se un sistema di equazioni ammette soluzioni, e quindi se un sistema è determinato, oppure se ammette infinite soluzioni. Si arriva così ad affermare che un sistema, a seconda delle situazioni che vengono a crearsi per le matrici di coefficienti numerici, può ammettere ∞^1, o ∞^2, o ∞^3 soluzioni e così via.

Sembrerebbe che debba essere $\infty^1 < \infty^2 < \infty^3$ e quindi infinità diverse. In realtà questo non è vero e l'infinità di soluzioni è sempre la stessa, cioè sono tutti infiniti con la stessa cardinalità, allo stesso modo in cui i punti di una retta sono della stessa infinità, se così si può dire, di un piano o di un volume. L'esponente sta solo ad indicare se le soluzioni si ottengono attribuendo una delle infiniti possibilità ad una sola variabile, a due variabili, a tre variabili e così via.

Cantor cercò anche, per il resto della vita, di dimostrare se esistesse un insieme di potenza intermedia fra i numeri razionali ed il continuo, senza però riuscirci, ed il problema è ancora irrisolto. Egli fece poi un ulteriore salto considerando un nuovo tipo di oggetti: gli insiemi; e infatti la teoria degli insiemi ebbe da lui un notevole impulso. Cantor fu il primo a intuire ed affermare che gli insiemi infiniti possono avere diverse grandezze o "cardinalità", un autentico colpo per la logica. Dato un qualsiasi insieme **I**, infatti, esiste sempre l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di **I**, chiamato da lui insieme potenza di **I**. Ad esempio prendiamo un insieme composto da soli **{1, 2 , 3}.** Possiamo considerare ora tutti i sottoinsiemi ottenibili da esso, a partire dall'insieme vuoto, cioè privo di elementi: **{ },{1},{2},{3},{1;2},{1;3},{2;3},{1;2;3}.** Cantor dimostrò che l'insieme potenza di un insieme **I** contiene più elementi di **I** stesso, in particolare trovò che se **I** contiene **m** elementi, l'insieme di potenza di **I** contiene $\mathbf{2^m}$ elementi. E' facile verificarlo nell'esempio appena fatto in cui **m=3** e quindi $\mathbf{2^3 = 8}$. E' il teorema di Cantor. Egli dimostrò, con un argomento del tipo diagonale usato per dimostrare la non numerabilità dei numeri reali, che questo era valido anche per insiemi che contenevano infiniti elementi, e che l'insieme potenza ha sempre una "cardinalità" maggiore dell'insieme di partenza. Dunque esiste una gerarchia infinita di "potenza" di insiemi infiniti, dalla quale sorgono i numeri "transfiniti", e la loro peculiare aritmetica, perché da un insieme si può costruire un insieme potenza di "cardinalità" sempre maggiore e così all'infinito. Infiniti che nascono l'uno dall'altro, come in un gioco di scatole cinesi, e ognuno più "grande" degli altri. Come ebbe a dire Hilbert: " Nessuno potrà cacciarci dal Paradiso nel quale ci ha portato Cantor". Anche Bertrand Russel riteneva che la conquista dell'infinito attuale fosse stata una tappa fondamentale per tutte le teorie matematiche.
Eppure c'era chi non condivideva queste opinioni, in particolare il prof. Kronecker osteggiò in tutti i modi Cantor, non condividendo affatto le sue idee sull'infinito, osteggiandolo in ogni modo a livello accademico ed impedendo che fosse assunto nella sua Università. Un primo colpo alle facoltà mentali di Cantor che cominciarono da quel momento a vacillare.
L'infinito però è oramai una realtà attuale, in ogni segmento, in ogni porzione di piano e di volume, lo abbiamo presente e incombente con la sua realtà e i suoi paradossi, ai quali semplicemente dobbiamo fare il callo. Mi piace una immagine visiva dell'infinito attuale alla quale ci richiama una poesia di J.L.Borges.

GLI SPECCHI

Io che ho sentito l'orrore degli specchi
Non solo davanti al cristallo impenetrabile
Dove finisce e inizia, inabitabile,
un' impossibile spazio di riflessi
ma davanti all'acqua speculare che imita
L'altro azzurro nel suo profondo cielo
Che a volte imprime l'illusorio volo
Dell' uccello inverso o che un tremore agita.
E davanti alla superficie silenziosa
Dell'ébano sottile la cui nitidezza
Ripete come un sogno la bianchezza
Di un vago marmo o una vaga rosa,

Oggi, al termine di tanti e perplessi
Anni dell’errare sotto la variabile luna,
Mi chiedo che azzardo della fortuna
Ha fatto si che io temessi gli specchi.
Specchi di metallo, mascherato
Specchio di caoba che nella bruma
Del suo rosso crepuscolo sfuma
Quel viso che guarda ed è guardato,
Infiniti li vedo, elementari
Esecutori di un antico patto,
Moltiplicare il mondo come l’atto
Generativo, insonni e fatali.
Prolungano questo vano mondo incerto
Nella sua vertiginosa ragnatela;
A volte alla sera li appanna
L’alito di un uomo che non è morto.
Ci acceca il cristallo. Se dentro le quattro
Pareti dell’alcova c’è uno specchio,
Già non sono solo. C’è altro. C’è il riflesso
Che monta all’alba un discreto teatro.
Tutto accade e niente si ricorda
In quegli uffici cristallini
Dove, come fantastici rabbini,
Leggiamo i libri di destra e sinistra.
Claudio, re di una sera, re sognato,
Non sentì che era un sogno fino a quel giorno
In cui un attore mimò la sua fellonia
Con arte silenziosa, in un tavolato.
Che vi siano sogni è raro, che vi siano specchi,
Che l’usuale e consumato repertorio
Di ogni giorno includa l’illusorio
Orbe profondo che ordiscono i riflessi.
Dio (è dato di pensare) pone un impegno
In tutta questa infattibile architettura
Che edifica la luce con la limpidezza
Del cristallo e l’ombra con il sogno.
Dio ha creato le notti che si riempiono
Di sogni e le forme dello specchio
Perché l’uomo senta che è riflesso
E vanità. Per questo ci allarmano.

(Da «El Hacedor»)

Se vi mettete tra due specchi paralleli e osservate le immagini riflesse, le vedrete riflesse un’infinità di volte. Allo stesso modo una cinepresa che proietti ciò che riprende sullo schermo sul quale la cinepresa stessa è puntata, proietterà una serie infinita di schermi uno dentro l’altro.

Leggiamo il racconto che segue, scritto ancora da quel genio della letteratura fantastica che è Jorge Luis Borges. In esso ritroviamo molti dei paradossi a cui porta il concetto di infinito.

IL LIBRO DI ARENA

Jorge Luis Borges

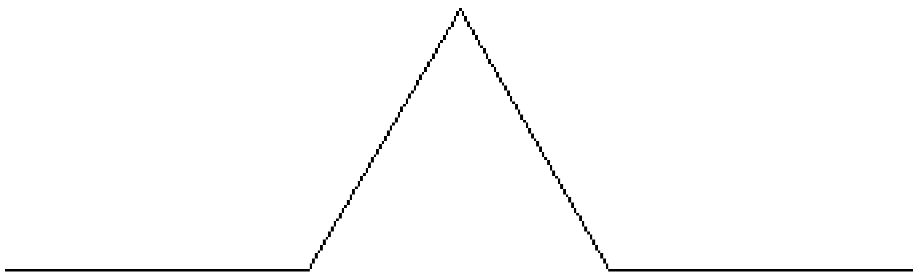
...thy rope of sands...
George Herbert (1593-1623)

La linea consta di un numero infinito di punti; il piano, di un numero infinito di linee; il volume, di un numero infinito di piani; l'ipervolume, di un numero infinito di volumi... No, decisamente non è questo, more geométrico, il miglior modo di iniziare il mio racconto. Affermare che è veritiero è adesso una convenzione di tutti i racconti fantástici; il mio, senza dubbio, è veritiero.
Io vivo solo, in un quarto piano di via Belgrano. Saranno alcuni mesi, al tramonto, udii un colpo alla porta. Aprii ed entró uno sconosciuto. Era un uomo alto, dai lineamenti indistinti. Forse la mia miopia li vide cosí. Tutto il suo aspetto era di una povertà decente.
Vestiva di grigio e portava una valigia grigia in mano. Subito percepii che era straniero. Al principio lo credei vecchio; poi avvertii che mi aveva ingannato il suo scarso capello biondo, quasi bianco, alla maniera scandinava. Nel corso della nostra conversazione, che non deve essere durata un'ora, seppi che proveniva dalle Orcadi.
Gli segnalai una sedia. L'uomo tardò un pò nel parlare. Emanava malinconia, come io adesso.
- Vendo bibbie – mi disse.
Non senza pedanteria gli risposi:
- In questa casa ci sono alcune bibbie inglesi, incluso la prima, quella di John Wiclif. Ho anche quella di Cipriano de Valera, quella di Lutero, che letterariamente è la peggiore, e un esemplare latino della Vulgata. Come potete vedere, non sono precisamente bibbie quelle che mi mancano.
Dopo un pò di silenzio mi rispose:
- Non solo vendo bibbie. Posso mostrarle un libro sacro che può darsi le interessi. L'ho acquistato ai confini di Bikanir.
Aprì la valigia e la lasciò sopra la tavola. Era un volume in ottavo, rilegato in tela. Senza dubbio era passato per molte mani. Lo esaminai; il suo inusitato peso mi sorprese.
Nel dorso diceva Holy Writ e sotto Bombay.
- Sarà del secolo diciannove - osservai.
- Non so. Non l'ho saputo mai - fu la risposta.
Lo aprii a caso. I caratteri mi erano estranei. Le pagine, che mi sembravano consumate e di povera tipografia, erano impresse a due colonne alla maniera di una bibbia. Il testo era stretto ed era ordinato in versetti. Nell'angolo superiore delle pagine c'erano cifre arabe. Mi chiamò la attenzione che la pagina pari portasse il numero (diciamo) 40.514 e la dispari, la seguente, 999. La girai; il dorso era numerato con otto cifre. Aveva una piccola illustrazione come è d'uso nei dizionari: un'àncora disegnata a penna, come dalla inesperta mano di un bimbo.
Fu allora che lo sconosciuto mi disse:
- Guardala bene. Già non la vedrà mai più.
C'era una minaccia nella affermazione, però non nella voce.
Guardai con attenzione il posto e chiusi il volume. Immediatamente lo riaprii. Invano cercai la figura dell'àncora, foglio dopo foglio. Per nascondere il mio sconcerto, gli dissi:
- Si tratta di una versione della Scrittura in qualche lingua indostana, non è vero?
- No - mi replicò.
Poi abbassò la voce come per confidarmi un segreto:
- Lo acquistai in un villaggio della pianura, in cambio di alcune rupie e della Bibbia. Il suo possessore non sapeva leggere. Sospetto che nel Libro dei Libri abbia visto un amuleto. Era della casta più bassa; la gente non poteva calpestare la sua ombra, senza contaminarsi. Mi disse che il suo libro si chiamava il Libro di Arena, perché né il libro né l'arena hanno né principio né fine.
Mi chiese che cercassi la prima pagina.
Appoggiai la mano sinistra sulla copertina e aprii con il pollice quasi incollato all'indice. Tutto fu inutile: sempre si interponevano vari fogli tra la copertina e la mano.

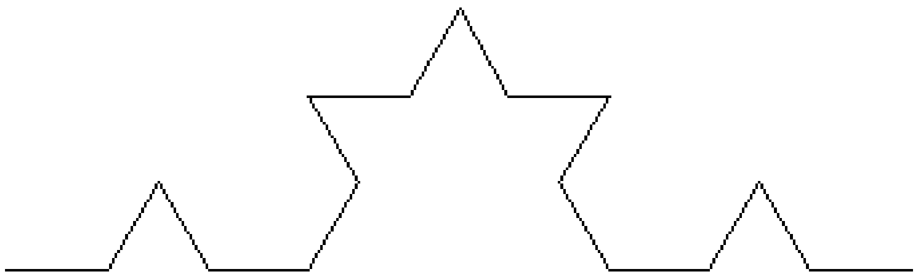
Era come se spuntassero dal libro.
- Adesso cerchi la fine.
Ancora fracassai; appena riuscii a balbettare con una voce che non era la mia:
- Questo non può essere.
Sempre con voce bassa il venditore di bibbie mi disse:
- Non può essere, però è. Il numero di pagine di questo libro è esattamente infinito. Nessuna è la prima; nessuna è la ultima. Non so perché sono numerate in quel modo arbitrario. Forse per dare a intendere che i termini di una serie infinita ammettono qualsiasi numero.
Dopo, come se pensasse ad alta voce:
- Se lo spazio è infinito stiamo in qualche punto dello spazio. Se il tempo è infinito stiamo in qualche punto del tempo.
Le sue considerazioni mi irritarono. Gli domandai:
- Voi siete religioso, senza dubbio?
- Si, sono presbiteriano. La mia coscienza è pulita. Sono sicuro di non aver truffato il nativo quando gli diedi la Parola del Signore in cambio del suo libro diabolico.
Lo rassicurai che non aveva niente da rimproverarsi, e gli domandai se era di passaggio da queste parti. Mi rispose che dentro di alcuni giorni pensava ritornare alla sua patria. Fu allora che seppi che era scozzese, delle isole Orcadi. Gli dissi che alla Scozia volevo bene personalmente per l'amore verso Stevenson e Hume.
- E di Robbie Burns - corresse.
Mentre parlavamo io continuavo ad esplorare il libro infinito. Con falsa indifferenza gli domandai:
- Vi proponete di offrire questo curioso esemplare al Museo Britannico?
- No. Lo offro a voi - mi replicò, e fissò una somma elevata.
Gli risposi, con tutta verità, che tale somma era inaccessibile per me e restai pensieroso. Dopo pochi minuti avevo ordito il mio piano.
- Vi propongo un cambio - gli dissi -. Voi avete ottenuto questo volume per alcune rupie e per la Sacra Scrittura; io vi offro l'ammontare della mia pensione, che ho appena riscosso, e la Bibbia di Wiclif in lettere gotiche. L'ho ereditato dai miei genitori.
- A black letter Wiclif - mormorò.
Andai al mio dormitorio e gli portai il denaro e il libro. Girò i fogli e studiò il frontespizio con fervore da bibliofilo.
- Affare fatto - mi disse.
Mi meravigliò che non contrattasse. Solo dopo avrei compreso che era entrato in casa mia con la decisione di vendere il libro. Non contó i biglietti, e li mise in tasca.
Parlammo dell'India, delle Orcadi e dei jarls norvegesi che le governarono. Era notte quando l'uomo se ne andò. Non l'ho più visto né so il suo nome..
Pensai di conservare il Libro di Arena nel vuoto che aveva lasciato il Wiclif, però optai infine per nasconderlo dietro alcuni volumi sfortunati di "Le Mille e Una Notte".
Mi coricai e non dormii. Alle tre o quattro del mattino accesi la luce. Cercai il libro impossibile, e lo sfogliai. In una di esse vidi incisa una maschera. L'angolo indicava una cifra, non so più quale, elevata alla nona potenza.
Non mostrai a nessuno il mio tesoro. Alla fortuna di possederlo si aggiunse il timore che me lo le rubassero, e dopo il sospetto che non fosse veramente infinito. Queste due inquietudini aggravarono la mia già vecchia misantropia. Mi rimanevano alcuni amici; smisi di vederli. Prigioniero del Libro, quasi non mi affacciavo alla strada. Esaminai con una lente di ingrandimento il consunto dorso e le copertine, e rifiutai la possibilità di qualche artificio. Comprovai che le piccole illustrazioni distavano duemila pagine una dall'altra. Le andai annotando in un libricino alfabetico che non tardai a riempire. Non si ripeterono mai. Di notte, negli scarsi intervalli che mi concedeva l'insonnia, sognavo del libro.
Declinava l'estate, e compresi che il libro era mostruoso. A nulla mi servì considerare che non meno mostruoso ero io, che lo percepivo con gli occhi e lo palpavo con le dieci dita con le unghie. Sentii che era un oggetto da incubo, una cosa oscena che infamava y corrompeva la realtà.

Pensai al fuoco, però temei che la combustione di un libro infinito fosse parimenti infinita e soffocasse di fumo il pianeta.
Ricordai di aver letto che il miglior luogo per occultare una foglia è un bosco. Prima di pensionarmi lavoravo alla Biblioteca Nazionale, che conserva novecentomila libri; so che a destra del vestibolo una scala curva sprofonda nel sotterraneo, dove sono i periodici e le mappe. Approfittai di una disattenzione degli impiegati per perdere il Libro di Arena in uno degli umidi scaffali. Cercai di non fissare a che altezza né a che distanza dalla porta.
Sento un poco di sollievo, però non voglio nemmeno passare per via México.
FINE

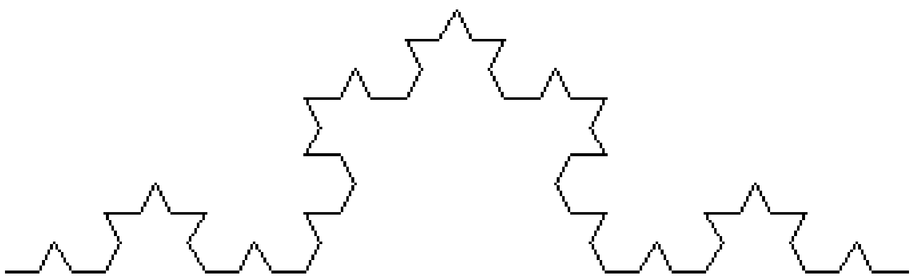
Paradossi degli infiniti attuali. I primi due righi del racconto ci riportano al teorema del Cavalieri (1598-1647), mediante il quale possiamo pensare aree e volumi come fette di curva di spessore infinitesimo e con il quale ogni studente apprende a calcolare aree e volumi tramite gli integrali, e a quanto Cantor ci ha dimostrato: rette, piani e volumi hanno la stessa cardinalità del continuo, per quanto riguarda l'infinità di punti. Eppure resta qualche problema, che cercherò di illustrare.
Consideriamo per esempio un triangolo equilatero e su ognuno dei lati costruiamo la curva di Von Koch, nata come esempio di curva priva di tangente in alcuni punti. Essa si realizza dividendo ogni lato in tre parti e costruendo sulla parte centrale un altro triangolo equilatero di lato 1/3. Reiterando il processo si ottengono su ogni lato le figura seguenti.



p=1

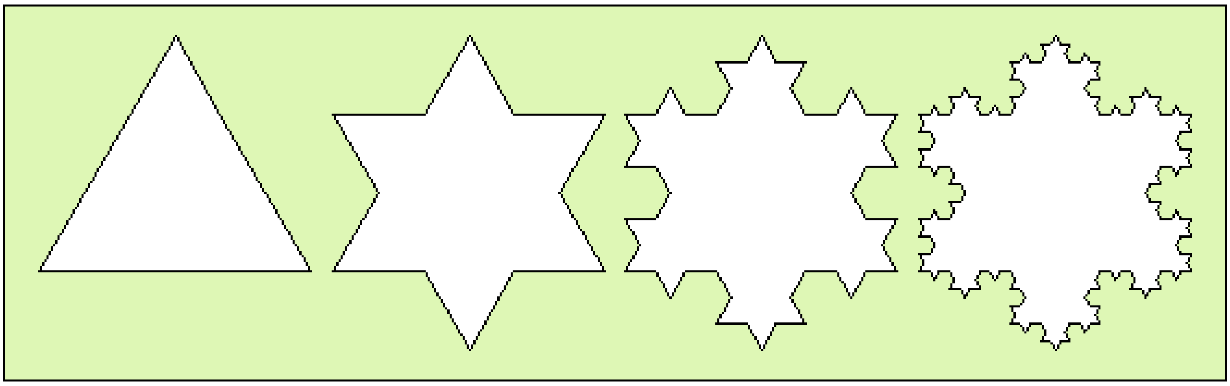


p=2



p=3

La figura che si ottiene è indicato come fiocco di Koch : per disegnare perfettamente questa curva, anche supponendo di poterlo fare alla velocità della luce, sarebbe necessario un tempo infinito.

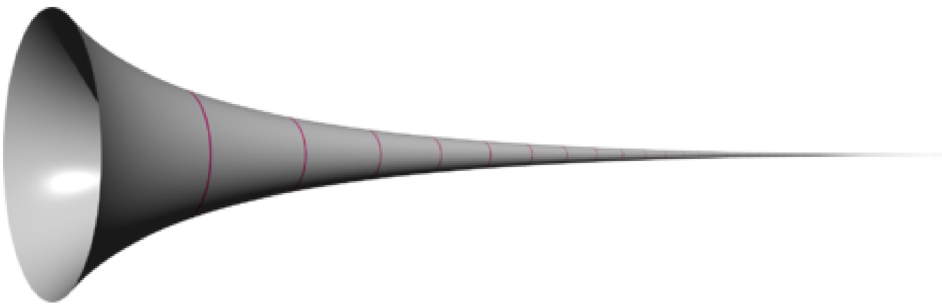


Ma non è questo il punto. Se consideriamo il suo perimetro P abbiamo che ad ogni passaggio il perimetro diventa 4/3 del perimetro precedente dato che ogni segmento diventa 4/3 del precedente e la sua lunghezza diventa dopo n passaggi evidentemente $P*(4/3)^n$. Facendo tendere n a infinito si ottiene infinito. Se prendiamo due punti appartenenti alla curva, con distanza euclidea e comunque piccola, la lunghezza della curva che porta dal primo al secondo (e viceversa), sempre seguendo la curva, è infinita. Ma se consideriamo la sua area, posta l'area iniziale del triangolo Ai = a, abbiamo:

$$A_f = a+\sum_{p=1}^{\infty} 3*4^{p-1} * (a/9^p) = a + (3/4)a*\sum_{p=1}^{\infty} (4/9)^p = (8/5)\, a$$

Che è una quantità finita senza alcun dubbio.

Eravamo partiti dal fatto che linee e aree avevano lo stesso numero di punti ed ora scopriamo, invece, che tutto questo non è vero. E l’assurdo è che stiamo parlando di perimetro e area di una stessa curva. E c’è un altro caso eclatante. Consideriamo il ramo di iperbole equilatera (espresso analiticamente da Y = 1/X) contenuto nel primo quadrante, e in particolare il solido che si ottiene facendo ruotare la sezione di curva che va da 1 a infinito attorno all’asse delle x.



La specie di imbuto che si ottiene viene anche indicata come “Tromba di Torricelli” o anche “Tromba di Gabriele”. Ogni studente delle superiori sa che di questo solido posso calcolare area della superficie esterna (o interna) e volume con gli integrali:

$$Area = \int_1^{\infty} 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx \geq 2\pi \int_1^{\infty} ydx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = 2\pi\,[ln(x)]_{x=1}^{\infty} = \infty$$

Ed il volume dello stesso solido con la formula.

$$Volume = \int_1^{\infty} \pi y^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \pi \left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{\infty} = \pi \cdot [0-(-1)] = \pi$$

I calcoli di questi integrali come si vede portano al risultato che l'area è infinita, mentre il suo volume è finito. Come a dire che questo solido può essere riempito di vernice, ma non può essere dipinto con la stessa vernice. Chiaramente un paradosso irrisolvibile se consideriamo aree e volumi alla stessa stregua.

Ma il colpo finale allo stato mentale Cantor lo ebbe, secondo quanto sostiene qualcuno, con un nuovo paradosso scoperto da Bertrand Russell (1872-1943), e che porta il suo nome. Esso risultò un colpo letale alle capacità psichiche di Cantor, provocandogli una crisi nervosa che lo portò a terminare i suoi giorni in un ospedale psichiatrico. Il paradosso di Russell, è anche noto come il paradosso del barbiere. In un villaggio c'è un solo barbiere che fa la barba a tutti coloro che non si fanno la barba da soli, e solo a loro. La domanda è : "Chi rade il barbiere?". Nasce un irrisolvibile paradosso perché da barbiere potrebbe radere se stesso ma non può farlo perché si raderebbe da solo e lui rade solo chi non si rade da solo, contraddicendo la premessa, e da cliente non potrebbe andare dal barbiere perché si fa la barba da solo. Questo paradosso, innocuo fino a quando si parla di barbieri, ebbe effetti devastanti sulla teoria degli insiemi, quando Russell propose particolari **insiemi che non sono elementi di se stessi**. Tutto un castello di premesse fatto di idee di insiemi di tipo intuitivo venne a cadere. La logica matematica, basata su costrutti logicamente coerenti e sulla quale stavano lavorando molti studiosi all'epoca, ne subì serie conseguenze tanto che molti interruppero le loro ricerche. Un famoso filosofo dell'epoca, Gottlob Frege (1848-1925), nel pubblicare il suo lavoro in cui cercava di ridurre la matematica e l'aritmetica ad una serie di assiomi basati solo sulla logica, fu costretto ad aggiungere una nota in cui dichiarava il proprio fallimento.

Per chiudere voglio offrire alla vostra attenzione ancora un racconto di J.L. Borges, la cui conclusione apre altri paradossi comuni alla scienza moderna, quale, come in questo caso, l'esistenza dei monopoli magnetici. Ma su questo forse è meglio tornare in un'altra occasione.

Il disco

Sono un taglialegna. Il nome non importa. La capanna in cui sono nato e nella quale presto dovrò morire si trova al bordo del bosco. Del bosco dicono che si estende fino al mare che circonda tutta la terra e che in esso si trovano case di legno simili alla mia. Non so; non le ho mai viste. E nemmeno ho mai visto l'altro lato del bosco. Il mio fratello maggiore, quando eravamo piccoli, mi fece giurare che tra noi due avremmo tagliato tutto il bosco fino a che non rimanesse neanche un albero. Mio fratello è morto e adesso è altro quello che cerco e continuerò a cercare. Verso ponente scorre un ruscello nel quale riesco a pescare con le mani. Nel bosco ci sono lupi, però i lupi non mi fanno arretrare e la mia ascia non mi è stata mai infedele. Non ho portato i conti dei miei anni. So che sono molti. I miei occhi già non vedono più. Al villaggio, al quale non vado perché mi perderei, ho fama di avaro ma, che può aver accumulato un taglialegna del bosco?

Chiudo la porta della mia casa con una pietra perché non entri la neve. Una sera sentii passi appesantiti e poi un colpo. Aprii ed entrò uno sconosciuto. Era un uomo alto e vecchio, avvolto in un mantello consunto. Gli attraversava la faccia una cicatrice. Gli anni sembravano avergli dato più autorità che magrezza, però notai che gli costava camminare senza bastone. Scambiammo alcune parole che non ricordo. Infine disse:

- *Non ho casa e dormo dove posso. Ho percorso tutta la Sassonia.*

Quelle parole ben si adattavano alla sua vecchiaia. Mio padre parlava sempre della Sassonia; adesso la gente la chiama Inghilterra.

Io avevo pane e pesce. Non parlammo durante il desinare. Incominciò a piovere. Con alcune pelli gli sistemai un giaciglio sul suolo di terra, dove morì mio fratello. All'arrivo della notte dormimmo.

Schiariva il giorno quando uscimmo dalla casa. La pioggia era cessata e la terra era coperta di neve fresca. Gli cadde il bastone e mi ordinò di raccoglierlo.

- *Perché dovrei obbedirti? – gli dissi.*

- *Perché sono un re - rispose.*

Lo credei pazzo. Raccolsi il bastone e glie lo diedi. Parlò con una voce distinta.

- *Sono re dei Secgens. Molte volte li ho condotti alla vittoria nella dura battaglia, ma nell'ora del destino ho perso il mio regno. Il mio nome è Isern e sono della stirpe di Odino.*
- *Io non venero Odino – gli risposi – Io venero Cristo.*

Come se non mi ascoltasse continuò:

- *Vado per i sentieri dell'esilio però sono ancora il re perché ho il disco. Lo vuoi vedere?*

Aprì la palma della mano che era ossuta. Non aveva niente nella mano. Era vuota. Fu solo allora che mi resi conto che l'aveva tenuta sempre chiusa.
Disse, guardandomi fissamente:

- *Puoi toccarlo.*

Io con un po' di diffidenza posi la punta delle dita nel palmo (della sua mano). Sentii una cosa fredda e vidi un bagliore. La mano si chiuse bruscamente. Non dissi nulla. L'altro continuò con pazienza come se parlasse con un bimbo:

- *E' il disco di Odino. Ha un solo lato. Nella terra non c'è altra cosa che abbia un solo lato. Finchè resterà in mano mia sarò il re.*
- *E' d'oro ? - gli chiesi.*
- *Non so. E' il disco di Odino e ha un solo lato.*

Allora sentii la cupidigia di possedere il disco. Se fosse stato mio, lo avrei potuto vendere per un lingotto d'oro e sarei stato un re.
Dissi al vagabondo che ancora odio:

- *Nella capanna ho nascosto uno scrigno di monete. Sono d'oro e brillano come l'ascia. Se mi dai il disco di Odino, io ti do lo scrigno.*

Disse con ostinatezza:

- *Non voglio.*
- *Allora - gli dissi - puoi proseguire il tuo cammino.*

Mi diede le spalle. Un colpo d'ascia nella nuca bastò e avanzò perché vacillasse e cadesse, però nel cadere aprì la mano e nell'aria vidi il bagliore. Segnai bene il luogo con l'ascia e trascinai il morto fino al ruscello che era molto cresciuto. Lì lo buttai.
Nel tornare a casa cercai il disco. Non lo trovai. Sono anni che continuo a cercare.

Domenico Di Bucchianico