La logica modale e la dimostrazione dell'esistenza di Dio di Gödel.

In alcuni giornali ho letto che di recente ci sono stati diversi studi che hanno riportato alla ribalta la dimostrazione dell'esistenza di Dio, la cosiddetta prova "ontologica', cioè basata solo sul ragionamento, pubblicata da Gödel intorno al 1970. Kurt Gödel (1906 – 1978) è una figura di assoluto rilievo del XX secolo; logico matematico ha sconvolto il mondo della matematica con il suo teorema di incompletezza, distruggendo tutte le aspettative di quanti cercavano una formalizzazione logica di tutte le dimostrazioni matematiche, come avevano cercato di fare Hilbert, Frege, Russell e altri. Ebbene alcuni studiosi dell'Universitá di Berlino affermano di aver dimostrato la consistenza del ragionamento di Gödel nella sua dimostrazione dell'esistenza di Dio, utilizzando dei computers (http://arxiv.org/pdf/1308.4526v4.pdf).

Per cercare di capirne di piú, della dimostrazione, riporto alcune mie considerazioni, non so quanto chiare, ma spero che siano esatte. Naturalmente tutto questo non ha niente a che vedere con il fatto di credere o meno nell'esistenza di Dio, ma solo come esercizio di "logica "; spero che non si offendano né i credenti né gli atei.

LOGICA MODALE

La logica modale prevede alcune nozioni fondamentali universalmente riconosciute.

Essa è basata sulle **Proposizioni**, cioè affermazioni che necessariamente sono o vere o false. La logica filosofica che regola tutto il funzionamento della logica modale è basata sul "Principio del terzo escluso". Non esiste una terza possibilità. (**Tertium non datur**).

Es: "Piove" è una preposizione, che potremmo indicare con Φ, che puó solo essere vera o falsa; non esiste la possibilitá di una terza scelta. "Prendo l'ombrello" è un'altra proposizione dello stesso tipo, cui potremmo assegnare un altro simbolo qualunque. Esprimere una Proposizione equivale ad asserirne la Verità.

- Esistono poi le Relazioni: **Equivalenza, Negazione, Disgiunzione, Congiunzione e Implicazione**.
  1) **Equivalenza**. Se Φ afferma che "Piove", la proposizione Ψ "Scende la pioggia" è evidentemente equivalente. L'espressione formale è $\Phi \equiv \Psi$. Vuol dire che le due proposizioni affermano la stessa cosa.
  2) **Negazione**. Se Φ equivale alla Proposizione "Piove", la sua negazione **$\sim \Phi$** equivale a "Non piove". In logica matematica corrisponde alla funzione "NOT" espressa con una barra sopra il simbolo della relazione (in questo caso A) **NOT A ≡ $\bar{A}$**.
  3) **Disgiunzione**. E' una relazione fra due o più Proposizioni: scrivere **$\Theta \equiv \Phi \vee \Psi$** equivale ad affermare che la proposizione **Θ** è vera quando è vera l'una o l'altra delle proposizioni Φ o Ψ o entrambe. Ad esempio **Θ** ≡ "Vado al cinema" è vera se o Φ ≡ "Ho i soldi" oppure Ψ ≡ "Ho chi me lo paga". In logica matematica la Disgiunzione è normalmente chiamata funzione "**OR**", indicata anche come "Somma logica" $Y = A + B$ (Il risultato è $Y = 1$ = vero se è $A = 1$= vero oppure $B = 1$= vero, o entrambe) (la si

trova anche indicata come funzione **Vel** come è immediato dedurre dal significato latino del termine stesso).

4) **Congiunzione**. E' anch'essa una relazione fra due o più proposizioni indicato con il simbolo del pallino moltiplicatore (Infatti in logica matematica equivale al prodotto logico e viene indicato come funzione "**AND**" chiamata anche funzione **Aut** (come al solito derivante dal latino), ad affermare l'inderogabilità della veridicità di tutte le proposizioni coinvolte, pena la falsità del risultato finale). $\Theta \equiv \Phi \cdot \Psi$ assume allora il significato che la proposizione Θ ≡ "Vado al cinema" è vera se Φ ≡ "Ho i soldi" e Ψ ≡ "Ho un mezzo per andarci", sottintendendo che non si può andare al cinema senza alcun mezzo di trasporto, essendo lo stesso cinema fuori città. In molti casi la relazione precedente può trovarsi scritta $\Theta \equiv \Phi \wedge \Psi$ dove si è utilizzato un altro simbolo universalmente riconosciuto per la Congiunzione**.**
5) **Implicazione**. Questa funzione può essere intesa come una conseguenza, cioè da una proposizione ne deriva un'altra o se si vuole che una proposizione implica che ne derivi un'altra. Ad esempio $\Phi \supset \Psi$ esprime il fatto che la proposizione Ψ ≡ "Prendo l'ombrello" deriva dalla proposizione Φ ≡ "Piove". O meglio, il fatto che "Piove" implica che io "Prendo l'ombrello". E' sottinteso il fatto che questo debba verificarsi sempre, cioè ogni volta che "Piove", necessariamente "Prendo l'ombrello".

- Esistono, ancora, i **Quantificatori**. Un quantificatore universale $\forall$ (Dato un elemento….., oppure per qualunque elemento preso….) ed un quantificatore esistenziale $\exists$ (esiste un…).

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

Quanto appena scritto, per esempio, non è altro che la definizione di funzione continua in un suo punto **p**. Essa afferma che una funzione è continua in **p** se **dato** un **ε** positivo, quindi maggiore di zero, **esiste** un δ anch'esso positivo, tale che per per ogni **x** che differisce da **p** per meno di **δ**, succede che la funzione **f(x)** differisce da **f(p)** per meno di **ε**. In altre parole che se **x** si avvicina indefinitamente a **p**, anche la funzione **f(x)** si avvicina indefinitamente a **f(p)**.

- Si aggiungono infine due **Operatori**.

1) Un operatore di necessità **N**. **N Φ** indica che "E' necessario che **Φ** sia vera".
2) Un operatore di possibilità **M**. **M Ψ** indica che "E' possibile che **Ψ** sia vera".

Per completare questa semplice introduzione alla logica modale, è utile introdurre due metodi logico-deduttivi indicati generalmente come "**Modus-ponens**" e "**Modus-tollens**". Questi metodi sono una conseguenza immediata della legge di Implicazione.
Il "**Modus-Ponens**" è espresso dalla relazione modale:

$$[(\Phi \supset \Psi) \wedge \Phi] \supset \Psi$$

(1)

La espressione appena scritta deve essere letta nel seguente modo: se la **Φ** implica **Ψ** e **Φ** è vera, allora ne deriva che anche **Ψ** è vera.
Esempio: se il fatto che "Piove" implica che sempre io "Prendo l'ombrello", allora se è vero che "Piove" e tutte le volte che "Piove", ne seguirà che io "Prendo l'ombrello".
Il "**Modus-Tollens**" è espresso invece dalla relazione modale:

$$[(\Phi \supset \Psi) \wedge \sim \Psi] \supset \sim \Phi$$

(2)

La espressione appena scritta deve essere letta nel seguente modo: se la **Φ** implica **Ψ** e **Ψ** non è vera, allora ne deriva che anche **Φ** non è vera.
Esempio: se il fatto che "Piove" implica che sempre io "Prendo l'ombrello", allora se non è vero che "Prendo l'ombrello", ne seguirà che non "Piove".
Si potrebbe anche interpretare quanto appena detto come una conseguenza di causa ed effetto. Se da una causa si ha sempre un dato effetto, quando ci sarà la causa ci sarà anche l'effetto, mancando l'effetto, invece, vuol dire che non c'è stata la causa.
Per inciso in logica matematica ed in generale le due espressioni relative al Modus-Ponens e Modus-Tollens rappresentano anche delle Tautologie, cioè affermazioni vere per definizione, come si potrebbe dimostrare costruendo le tabelle di verità, secondo i metodi noti nella logica matematica, e verificando che per qualunque combinazione delle variabili di ingresso, il risultato è sempre vero.

Per poter affrontare, o perlomeno tentare di affrontare la dimostrazione di Gödel, occorre, però, introdurre alcuni Assiomi e Regole. Come è noto nelle dimostrazioni matematiche gli "Assiomi" assumono il significato di affermazioni che sono vere senza alcuna necessità di dimostrazione.
Nella logica modale S5, come viene comunemente chiamata, abbiamo una prima definizione dell'operatore di possibilità **M** in funzione dell'operatore necessità **N**.

Assioma

$$N\,\Phi \equiv \sim M \sim \Phi$$

(3)

La espressione precedente si legge abbastanza facilmente: il fatto che **Φ** sia necessario equivale a dire che non è possibile il suo contrario, cioè se è necessario che **Φ** sia vera, non è possibile che la stessa **Φ** non sia vera.

Regola di Necessitazione

$$\Phi \supset N\,\Phi$$

(4)

Essa ha una interpretazione che potrebbe dare adito a perplessità, in quanto afferma che se **Φ** allora **N Φ**, cioè se **Φ** è in qualche modo conseguenza di qualcosa, allora anche la sua necessità ne è una conseguenza. Questa uguaglianza fra una proposizione e la sua necessità è una sorta di corto circuito autoreferenziale che crea una sorta di reazione a catena riprodotta nella regola **S4** della logica modale

Regola S4

$$N\ \Phi \supset N\ N\ \Phi \tag{5}$$

Se **Φ** è necessario, allora lo è necessariamente, cioè è necessario che sia necessario. E così si potrebbe continuare all'infinito.

Regola K

$$N(\ \Phi \supset \Psi\ ) \supset (N\ \Phi\ \supset N\ \Psi) \tag{6}$$

L'interpretazione di questa espressione è la seguente: dal fatto che **Φ** necessariamente implica **Ψ** sempre e comunque, ne segue che se **Φ** è necessariamente vera, lo deve essere necessariamente anche **Ψ**.
Un altro assioma, a mio avviso discutibile, è la seguente

Regola T o M

$$N\ \Phi \supset \Phi \tag{7}$$

Se è necessario che **Φ** sia vero, allora **Φ** è vero.

E per finire un'ultima regola

Regola S5

$$M\ \Phi \supset N\ M\ \Phi \tag{8}$$

Questa ultima espressione è una semplice applicazione della regola di necessitazione, considerando una nuova proposizione **Σ ≡ M Φ** e applicando la regola di necessitazione (4) alla stessa

$$\Sigma \supset N\ \Sigma$$

Da essa si può dedurre che il fatto che sia possibile che **Φ** sia vera, implica che essa sia necessariamente vera, sempre e comunque. Cioè una volta che si sia stabilito che una cosa è possibilmente vera, lo diventa per sempre ed in ogni circostanza; non potrà mai avvenire che per qualche motivo non sia più vera.

Dimostrazione di Gödel

La dimostrazione dell'esistenza di Dio sviluppata da Gödel prevede 9 tappe successive,ognuna logicamente dipendente dalla precedenti.

I – Definizione della proprietà positiva P (Φ) .

E' una semplice affermazione di esistenza. Esistono delle proprietà positive e posso indicarle con P(**Φ**). Tra esse possiamo indicare l'essere onnipotente, essere giusto, essere misericordioso e così via. Si potrebbe obiettare sulla positività o meno di certe proprietà, ma al momento dobbiamo solo constatare che esistono delle proprietà positive, senza entrare nel merito. Se infatti esistono proprietà positive abbiamo i seguenti assiomi

Assioma 1

$$P(\Phi) \wedge P(\Psi) \supset P(\Phi \wedge \Psi)$$

(9)

Se sono proprietà positive **Φ** e **Ψ** lo è anche la congiunzione fra **Φ** e **Ψ**, cioè se "Essere onnipotente" è una proprietà positiva e "Essere onnisciente" è anch'essa una proprietà positiva, dovrà esserlo anche l'"Essere onnipotente e onnisciente". Quanto appena affermato vale naturalmente per qualunque numero di elementi positivi.

Assioma 2

$$P(\Phi) \vee P(\sim \Phi)$$

(10)

Non è possibile che una proprietà sia nello stesso tempo positiva o non positiva. Se una proprietà è positiva non lo è di certo il suo contrario, così come l'opposto di una proprietà negativa è sempre positiva.

II- Definizione di Dio - G(x)

$$G(x) \equiv (\Phi) \left[P(\Phi) \supset \Phi(X) \right]$$

(11)

Lettura: dire che Dio (l'Essere indicato con X) è un Essere divino equivale al fatto che per ogni proposizione **Φ** (**Φ** racchiusa tra parentesi) si verifica che ogni proprietà positiva di **Φ** implica la sua appartenenza a X.

Un essere X è di natura Divina solo se possiede tutte e solo proprietà positive, per quante esse siano.

A Dio appartengono solo proprietà positive. A Lui sono negate tutte le proprietà negative. Per questo è anche un'Entità piena e completa, mancandogli qualunque privazione, visto che qualunque privazione o mancanza di qualcosa è una proprietà negativa.

III – Definizione di relazione di Essenza : Φ Ess. X

$$\Phi \text{ Ess. } X \equiv (\Phi)\,[\,\Psi(X) \supset N(Y)\,[\,\Phi(Y) \supset \Psi(Y)\,]\tag{12}$$

La lettura della espressione precedente non è immediata. Proviamo comunque a farlo: dire che l'espressione Φ è un'essenza di X (Dio) equivale ad affermare che qualunque proprietà Φ di Dio implica necessariamente l'esistenza di una entità Y che realizza la condizione che l'appartenenza della proprietà Φ a Y implica anche il suo possesso della ulteriore proprietà Ψ. Il chè significa che se Φ è una proprietà di Dio, lo è anche Ψ, o più semplicemente che due qualunque essenze di Dio sono necessariamente equivalenti. (resta il dubbio, a mio avviso se X e Y debbano essere la stessa Cosa, cioè la stessa entità divina.

IV – Definizione della relazione di necessitazione.

$$p \supset N\ q \equiv N\,(p \supset q)\tag{13}$$

Se da p deriva necessariamente q, allora è necessario che q derivi da p. Questa definizione generale è poi applicata in particolare alla proprietà positive e non positive, sempre in base alla regola (4).

$$P(\Phi) \supset N\ P\,(\Phi)$$

Se una proprietà è positiva, allora è necessariamente positiva.

$$\sim P(\Phi) \supset N \sim P\,(\Phi)$$

Se una proprietà è non positiva, allora è necessariamente non positiva.

V – Teorema 1 : Se un essere è Dio, cioè di natura divina, allora la sua essenza (di X) è la natura divina G .

$$G(X) \equiv G \text{ Ess. } X\tag{14}$$

La precedente espressione va presa com'è, senza alcuna discussione.

VI – Definizione di esistenza necessaria E(X).

$$E\,(X) \equiv (\Phi)\,[\,\Phi \text{ Ess. } X \supset N\,(\exists X)\ \ \Phi\,(X)\,]$$

(15)

Anche questa espressione non è di facile lettura. Dire che Dio esiste equivale ad affermare che per ogni elemento **Φ** di X (Dio stesso) si verifica che, dal fatto che ogni elemento **Φ** sia essenziale per X deriva che necessariamente esiste un'entità X (Dio) che ha la proprietà **Φ** stessa. Si potrebbe ancora dire che Dio (X) esiste necessariamente solo se la sua essenza ed ogni suo elemento essenziale esistono necessariamente.
Da quanto appena detto Gödel deriva l'Assioma 4 :

$$P\,(E)$$

L'esistenza necessaria è una proprietà positiva.

VII – Teorema 2 – Se Dio è possibile allora è necessaria la sua esistenza.

Questo Teorema è uno dei punti cardine della dimostrazione di Gödel. Analizziamo i vari passaggi utilizzati per arrivare a questa conclusione:

$$\mathbf{G(X) \supset N\,(\exists Y)\;\; G\,(Y)}$$
(16)

Se X è Dio allora è necessaria la sua esistenza. Ricordiamo che si è appena affermato che l'esistenza è una proprietà positiva e che nella definizione II di Dio si è accettato che un essere X è di natura divina solo se ha proprietà positive.
Ne consegue che se Dio esiste, allo stesso modo è necessaria la sua esistenza:

$$\mathbf{(\exists X)\; G(X) \supset N\,(\exists\; Y)\;\; G\,(Y)}$$
(17)

La controversa regola di necessitazione (4) ci costringe ancora a scrivere che deve essere:

$$\mathbf{\Sigma \supset N\,\Sigma}$$

$$\mathbf{N\,[(\exists X)\; G(X) \supset N\,(\exists\; Y)\;\; G\,(Y)\,]}$$
(18)

Cioè: è necessario che se Dio esiste allora esiste necessariamente. L'esistenza stessa diventa una necessità ineludibile.
Se prendiamo la (17) e applichiamo a entrambi i membri l'operatore M, si ottiene:

$$\mathbf{M\,(\exists\, X)\; G(X) \supset M\,N\,(\exists\; Y)\;\; G\,(Y)}$$
(19)

Tenendo conto ancora di quanto appena scritto e della regola S5 (8) definita nell'introduzione, si ha che (ricordiamo l'operatore M che significa: è possibile che):

$$M\ \Phi \supset N\ M\ \Phi$$

Questo ci assicura che se qualche **Φ** è possibile, deve esserlo necessariamente sempre, e abbiamo allora la conclusione:

$$M\ (\exists X)\ G(X) \supset N\ (\exists Y)\ G(Y)$$
(20)

Questa è una conclusione importante perchè afferma che se è possibile che Dio esista, allora deve esistere necessariamente. Resta quindi da dimostrare che è possibile che Dio esiste ed il gioco è fatto, perché allora dovrà esistere necessariamente.

VIII- Dio è possibile.

Per arrivare a dimostrarlo Gödel parte da un Assioma n. 5. Se una proprietà positiva ne implica un'altra, questa seconda dovrà essere anch'essa positiva, cioè in formule:

$$[\,P(\Phi) \cdot \Phi \supset N\ \Psi\,] \supset P\ (\Psi)$$
(21)

Gödel in pratica afferma che un sistema, da lui indicato con S, **c**he ammette tutte proprietà positive, deve essere compatibile cioè non deve ammettere contraddizioni interne, perché se un sistema non è auto contraddittorio allora è sicuramente possibile. Come abbiamo appena visto siamo proprio alla ricerca di qualcosa di "Possibile", perché il punto VII si concludeva esattamente, (20), con la necessità dell'esistenza per qualcosa che sia possibile.
L'assioma 1 sosteneva che un sistema che abbia proprietà positive le deve contenere tutte e non può contenere proprietà negative. Da un punto di vista logico-matematico le proprietà positive soddisfano il criterio della additività: due quantità positive sommandosi non possono dare come risultato una quantità negativa, perché se ciò fosse vero il sistema S che contiene solo quantità positive, dovrebbe anche contenere quantità negative auto-contraddicendosi. Poiché ciò non avviene il sistema S è "compatibile" e coerente. Gödel ne trae la conclusione che se esiste qualcosa che non è auto contraddittorio, allora è possibile. Quindi il sistema S è possibile. E in particolare "E' possibile che esista Dio", introdotto proprio nel sistema S.

IX – Dio esiste necessariamente.

Siamo quindi arrivati alla conclusione. Applicando la regola del "Modus-Ponens" possiamo affermare infine che: se dal fatto che "Se Dio è possibile" ne viene che "allora Dio esiste necessariamente" (20) , poichè "L'esistenza di Dio è possibile" come visto al punto VIII, si ha che "Dio esiste necessariamente"!